RENÉ GUÉNON

Os princípios do cálculo infinitesimal

(1946)

Tradução: Luiz Gambogi. Email: legterra@terra.com.br

ÍNDICE DE MATÉRIAS

PREFÁCIO

Ainda que o presente estudo possa parecer, à primeira vista ao menos, não ter mais que um caráter um pouco «especial», pareceu-nos útil empreender-lhe para precisar e explicar mais completamente algumas noções que nos sucedeu mencionar nas diversas ocasiões que nos servimos do simbolismo matemático, e esta razão bastaria em suma para justificar-lhe sem que tenha lugar a insistir mais nisso. Não obstante, devemos dizer que a isso se agregam também outras razões secundárias, que concernem sobretudo ao que se poderia chamar o lado «histórico» da questão; efetivamente, este não está inteiramente desprovido de interesse desde nosso ponto de vista, no sentido de que todas as discussões que se suscitaram sobre o tema da natureza e do valor do cálculo infinitesimal oferecem um exemplo contundente dessa ausência de princípios que caracteriza às ciências profanas, isto é, as únicas ciências que os modernos conhecem e que inclusive concebem como possíveis. Já observamos freqüentemente que a maioria dessas ciências, na medida inclusive em que correspondem ainda a alguma realidade, não representam nada mais que simples resíduos desnaturalizados de algumas das antigas ciências tradicionais: é a parte mais inferior destas, a que, tendo cessado de ser posta em relação com os princípios, e tendo perdido por isso sua verdadeira significação original, acabou por tomar um desenvolvimento independente e por ser considerada como um conhecimento que se basta a si mesmo, ainda que, certamente, seu valor próprio como conhecimento, precisamente por isso mesmo, encontra-se reduzido a quase nada. Isso é evidente sobretudo quando se trata das ciências físicas, mas, como explicamos em outra parte,[1] as matemáticas modernas mesmas não constituem nenhuma exceção sob este aspecto, se se as compara ao que eram para os antigos a ciência dos números e a geometria; e, quando falamos aqui dos antigos, nisso é mister compreender inclusive a antigüidade «clássica», como um mínimo estudo das teorias pitagóricas e platônicas basta para mostrá-lo, ou o deveria ao menos se não fosse mister contar com a extraordinária incompreensão daqueles que pretendem interpretá-las hoje em dia. Se essa incompreensão não fora tão completa, ¿como se poderia sustentar, por exemplo, a opinião de uma origem «empírica» das ciências em questão, enquanto, em realidade, aparecem ao contrário tanto mais afastadas de todo «empirismo» quanto mais atrás nos remontamos no tempo, assim como ocorre igualmente com todo outro ramo do conhecimento científico?

Os matemáticos, na época moderna, e mais particularmente ainda na época contemporânea, parecem ter chegado a ignorar o que é verdadeiramente o número; e, nisso, não estamos falando só do número tomado no sentido analógico e simbólico em que o entendiam os Pitagóricos e os Cabalistas, o que é muito evidente, senão inclusive, o que pode parecer mais estranho e quase paradoxal, do número em sua acepção simples e propriamente quantitativa. Efetivamente, os matemáticos modernos reduzem toda sua

[1] Ver *El Reino de la Cantidad y los Signos de los tiempos*.

ciência ao cálculo, segundo a concepção mais estreita do que se possa fazer dele, isto é, considerado como um simples conjunto de procedimentos mais ou menos artificiais, e que não valem em suma mais do que pelas aplicações práticas às que dá motivo; no fundo, isso equivale a dizer que substituem o número pela cifra e, ademais, esta confusão do número com a cifra está tão extendida em nossos dias que se poderia encontrá-la facilmente a cada instante até nas expressões da linguagem corrente[2]. Agora bem, em todo rigor, a cifra não é nada mais que a vestimenta do número; nem sequer dizemos seu corpo, já que, em certos aspectos, é mais corretamente a forma geométrica a que pode considerar-se legitimamente como constituindo o verdadeiro corpo do número, assim como o mostram as teorias dos antigos sobre os polígonos e os poliedros, postos em relação direta com o simbolismo dos números; e, ademais, isto concorda com o fato de que toda «incorporação» implica necessariamente uma «espacialização». Não obstante, não queremos dizer que as cifras mesmas sejam signos inteiramente arbitrários, cuja forma não teria sido determinada mais do que pela fantasia de um ou de vários indivíduos; com os caracteres numéricos deve ocorrer o mesmo que com os caracteres alfabéticos, dos que, em algumas línguas, não se distinguem[3], e se pode aplicar a uns tanto como aos outros a noção de uma origem hieroglífica, isto é, ideográfica ou simbólica, que vale para todas as escrituras sem exceção, por dissimulado que possa estar esta origem em alguns casos devido a deformações ou alterações mais ou menos recentes.

O que há de certo, é que os matemáticos empregam em sua notação símbolos cujo sentido já não conhecem, e que são como vestígios de tradições esquecidas; e o que é mais grave, é que não só não se perguntam qual pode ser esse sentido, senão que nem sequer parecem querer que tenham algum. Efetivamente, tendem cada vez mais a considerar toda notação como uma simples «convenção», pela qual entendem algo que está proposto de uma maneira inteiramente arbitrária, o que, no fundo, é uma verdadeira impossibilidade, já que jamais se faz uma convenção qualquer sem ter alguma razão para fazê-la, e para fazer precisamente essa mais bem do que qualquer outra; é só àqueles que ignoram essa razão a quem a convenção pode parecer-lhes arbitrária, de igual modo que não é senão àqueles que ignoram as causas de um acontecimento a quem este pode parecer-lhes «fortuito»; efetivamente, isso é o que se produz aqui, e se pode ver nisso uma das conseqüências mais extremas da ausência de todo princípio,

---

[2] ¡Ocorre o mesmo com os «pseudo-esoteristas» que sabem tão pouco do que querem falar que nunca deixam de cometer esta mesma confusão nas elucubrações fantásticas com as que têm a pretensão de substituir à ciência tradicional dos números!

[3] O hebreu e o grego estão nesse caso, e o árabe o estava igualmente antes da introdução do uso das cifras de origem índia, que depois, modificando-se mais ou menos, passaram daí à Europa da idade média; pode-se destacar a este propósito que a palavra «cifra» mesma não é outra coisa que o árabe *ꞌifr*, ainda que este não seja em realidade mas que a designação do zero. Por outra parte, é verdade que em hebreu, *saphar* significa «contar» ou «numerar» ao mesmo tempo que «escrever», de onde *sepher* «escritura» ou «livro» (em árabe *sifr*, que designa particularmente um livro sagrado), e *sephar*, «numeração» ou «cálculo»; desta última palavra vem também a designação dos *Sephiroth* da Cabala, que são as «numerações» principais assimiladas aos atributos divinos.

ausência que chega até fazer perder à ciência, ou supostamente tal, pois então já não merece verdadeiramente esse nome sob nenhum aspecto, toda significação plausível. Ademais, devido ao fato mesmo da concepção atual de uma ciência exclusivamente quantitativa, esse «convencionalismo» se estende pouco a pouco desde as matemáticas às ciências físicas, em suas teorias mais recentes, que assim se afastam cada vez mais da realidade que pretendem explicar; insistimos suficientemente sobre isto em outra obra como para dispensar-nos de dizer nada mais a este respeito, tanto mais quanto que é só das matemáticas do que vamos ocupar-nos agora mais particularmente. Desde este ponto de vista, só acrecentaremos que, quando se perde tão completamente de vista o sentido de uma notação, é muito fácil passar do uso legítimo e válido desta a um uso ilegítimo, que já não corresponde efetivamente a nada, e que às vezes pode ser inclusive completamente ilógico; isto pode parecer bastante extraordinário quando se trata de uma ciência como as matemáticas, que deveria ter com a lógica laços particularmente estreitos, e, no entanto, é muito certo que se podem assinalar múltiplos ilogismos nas noções matemáticas tais como se consideram comumente em nossa época.

Um dos exemplos mais destacáveis dessas noções ilógicas, e que teremos que considerar aqui antes de mais nada, ainda que não será o único que encontraremos no curso de nossa exposição, é o do pretendido infinito matemático ou quantitativo, que é a fonte de quase todas as dificuldades que se suscitaram contra o cálculo infinitesimal, ou, talvez mais exatamente, contra o método infinitesimal, já que nisso há algo que, pensem o que pensem os «convencionalistas», ultrapassa o alcance de um simples «cálculo» no sentido ordinário desta palavra; só há que fazer uma exceção com aquelas, das dificuldades que provém de uma concepção errônea ou insuficiente da noção de «limite», indispensável para justificar o rigor deste método infinitesimal e para fazer dele outra coisa que um simples método de aproximação. Ademais, como o veremos, há que fazer uma distinção entre os casos em que o suposto infinito não expressa mais do que uma absurdidade pura e simples, isto é, uma idéia contraditória em si mesma, como a do «número infinito», e aqueles em que só se emprega de uma maneira abusiva no sentido de indefinido; mas seria mister não crer por isso que a confusão mesma do infinito e do indefinido se reduz a uma simples questão de palavras, já que recai verdadeiramente sobre as idéias mesmas. O que é singular, é que esta confusão, que tivesse bastado dissipar para atalhar tantas discussões, tenha sido cometida por Leibnitz mesmo, a quem se considera geralmente como o inventor do cálculo infinitesimal, e a quem chamaríamos mais corretamente seu «formulador», já que este método corresponde a algumas realidades, que, como tais, têm uma existência independente daquele que as concebe e que as expressa mais ou menos perfeitamente; as realidades de ordem matemática, como todas as demais, só podem ser descobertas e não inventadas, enquanto, pelo contrário, é de «invenção» do que se trata quando, assim como ocorre muito freqüentemente neste domínio, alguém se deixa arrastar, devido a um «jogo» de notação, à fantasia pura; mas, certamente, seria muito difícil fazer compreender esta diferença a matemáticos que se imaginam gostosamente que toda sua ciência não é nem deve ser nada mais que uma «construção do espírito humano», o que, se fosse mister

crer-lhes, a reduziria certamente a ser muito pouca coisa em realidade. Seja como seja, Leibnitz não soube nunca se explicar claramente sobre os princípios de seu cálculo, e isso é o que mostra que tinha algo nesse cálculo que lhe ultrapassava e que se impunha em certo modo a ele sem que tivesse consciência disso; se se tivesse dado conta, certamente não teria se enredado numa disputa de «prioridade» sobre este tema com Newton, e, ademais, esse tipo de disputas são sempre perfeitamente vãs, já que as idéias, enquanto são verdadeiras, não poderiam ser a propriedade de ninguém, apesar do «individualismo» moderno, já que é só o erro o que pode atribuir-se propriamente aos indivíduos humanos. Não nos estenderemos mais sobre esta questão, que poderia levar-nos bastante longe do objeto de nosso estudo, ainda que quiçá não seja inútil, em alguns aspectos, fazer compreender que o papel do que se chama os «grandes homens» é freqüentemente, numa boa medida, um papel de «receptores», de sorte que, geralmente, eles mesmos são os primeiros em iludir-se sobre sua «originalidade».

O que nos concerne mais diretamente pelo momento, é isto: se temos que constatar tais insuficiências em Leibnitz, e insuficiências tanto mais graves quanto que recaem especialmente sobre as questões de princípios, ¿que será então com os demais filósofos e matemáticos modernos, aos que, certamente, Leibnitz é muito superior apesar de tudo? Esta superioridade, deve-se, por uma parte, ao estudo que tinha feito das doutrinas escolásticas da idade média, ainda que nem sempre as tenha compreendido inteiramente, e, por outra, a alguns dados esotéricos, de origem ou de inspiração principalmente rosacruciana[4], dados evidentemente muito incompletos e inclusive fragmentários, e que, ademais, às vezes lhe ocorreu aplicar bastante mal, como veremos alguns exemplos disso aqui mesmo; para falar como os historiadores, é a estas duas «fontes» às que convém referir, em definitivo, quase tudo o que há de realmente válido em suas teorias, e isso é também o que lhe permite responder, ainda que imperfeitamente, contra o cartesianismo, que representava então, no duplo domínio filosófico e científico, todo o conjunto das tendências e das concepções mais especificamente modernas. Esta precisão basta em suma para explicar, em poucas palavras, tudo o que foi Leibnitz, e, se se lhe quer compreender, seria necessário não perder de vista nunca estas indicações gerais, que, por esta razão, cremos bom formular desde o começo; mas é tempo de deixar estas considerações preliminares para entrar no exame das questões mesmas que nos permitirão determinar a verdadeira significação do cálculo infinitesimal.

---

[4] A marca inegável dessa origem se encontra na figura hermética colocada por Leibnitz na portada de seu tratado *Da Arte combinatória*: é uma representação da *Rota Mundi*, na que, no centro da dupla cruz dos elementos (fogo e água, ar e terra) e das qualidades (quente e frio, seco e úmido), a *quinta essência* está simbolizada por uma rosa de cinco pétalas (que corresponde ao éter considerado em si mesmo como princípio dos outros quatro elementos); ¡naturalmente, esta *insígnia* passou completamente despercebida para todos os comentadores universitários!

CAPÍTULO I

INFINITO E INDEFINIDO

Procedendo em certo modo em sentido inverso da ciência profana, devemos, segundo o ponto de vista constante de toda ciência tradicional, estabelecer aqui antes de mais nada o princípio que nos permitirá resolver depois, de uma maneira quase imediata, as dificuldades às que deu lugar o método infinitesimal, sem deixar-nos extraviar nas discussões que de outro modo correriam o risco de ser intermináveis, como o são em efeito para os filósofos e os matemáticos modernos, que, pelo fato mesmo de que lhes falta este princípio, não chegaram nunca a apresentar uma solução satisfatória e definitiva a estas dificuldades. Este princípio, é a idéia mesma do Infinito entendido em seu único sentido verdadeiro, que é o sentido puramente metafísico, e, ademais, sobre este ponto, não temos mais do que recordar sumariamente o que já expusemos mais completamente em outra parte[5]: o Infinito é propriamente o que não tem limites, já que finito é evidentemente sinônimo de limitado; portanto, não se pode aplicar sem abuso esta palavra a outra coisa que ao que não tem absolutamente nenhum limite, isto é, ao Todo universal que inclui em si mesmo todas as possibilidades, e que, portanto, não poderia ser limitado de nenhuma maneira por nada; entendido assim, o Infinito é metafísica e logicamente necessário, já que não só não pode implicar nenhuma contradição, já que não encerra em si mesmo nada de negativo, senão que é, ao contrário, sua negação a que seria contraditória. Ademais, evidentemente não pode ter mais do que um Infinito, já que dois Infinitos supostos distintos se limitariam um ao outro, e portanto, se excluiriam forçosamente; portanto, toda vez que a palavra «infinito» se emprega em um sentido diferente do que acabamos de dizer, podemos estar seguros *a priori* de que esse emprego é necessariamente abusivo, já que, em suma, equivale a ignorar pura e simplesmente o Infinito metafísico, ou a supor outro infinito ao lado dele.

É verdade que os escolásticos admitiam o que chamavam *infinitum secundum quid*, que distinguiam cuidadosamente do *infinitum absolutum* que é unicamente o Infinito metafísico; mas nisso não podemos ver mais do que uma imperfeição de sua terminologia, já que, se esta distinção lhes permitia escapar à contradição de uma pluralidade de infinitos entendidos no sentido próprio, não é menos certo que esse duplo emprego da palavra *infinitum* corria o risco de causar múltiplas confusões, já que, ademais, um dos sentidos que lhe davam assim era completamente impróprio, já que dizer que algo é infinito só sob um certo aspecto, o que é a significação exata da expressão *Infinitum secundum quid*, isto é, que em realidade não é infinito de nenhuma

[5] *Los Estados múltiples del ser*, cap. I

maneira[6]. Efetivamente, não é porque uma coisa não está limitada em um certo sentido ou sob uma certa relação pelo que se pode concluir legitimamente que não está limitada de nenhuma maneira, o que seria necessário para que fora verdadeiramente infinita; não só pode estar limitada ao mesmo tempo sob outros aspectos, senão que inclusive podemos dizer que o está necessariamente, desde que é uma certa coisa determinada, e que, por sua determinação mesma, não inclui toda possibilidade, já que isso mesmo equivale a dizer que está limitada pelo que deixa fora dela; ao contrário, se o Todo universal é infinito, é precisamente porque não deixa nada fora dele[7]. Por conseguinte, toda determinação, por geral que se a suponha, e qualquer que seja a extensão que possa receber, é necessariamente excluída da verdadeira noção de infinito[8]; uma determinação, qualquer que seja, é sempre uma limitação, já que tem como caráter essencial definir um certo domínio de possibilidades em relação a todo o resto, e porque, por isso mesmo, exclui a todo esse resto. Assim, há um verdadeiro despropósito em aplicar a idéia de infinito a uma determinação qualquer, por exemplo, no caso que vamos considerar aqui mais especialmente, à quantidade ou a um ou outro de seus modos; a idéia de um «infinito determinado» é demasiado manifestamente contraditória como para que tenha lugar a insistir mais nisso, ainda que esta contradição tenha escapado muito freqüentemente ao pensamento profano dos modernos, e ainda que aqueles mesmos que se poderiam chamar «semiprofanos» como Leibnitz, não tenham sabido aperceber claramente[9]. Para fazer destacar ainda melhor esta contradição, poderíamos dizer, em outros termos que são equivalentes no fundo, que é evidentemente absurdo querer definir o Infinito: efetivamente, uma definição não é outra coisa que a expressão de uma determinação, e as palavras mesmas dizem bastante claramente que o que é suscetível de ser definido não pode ser mais do que finito ou limitado; procurar fazer entrar o Infinito numa fórmula, ou, se se prefere, revestir-lhe de uma forma qualquer que seja, é, consciente ou inconscientemente, esforçar-se em fazer entrar o Todo universal em um dos elementos mais ínfimos que estão compreendidos nele, o que, certamente, é efetivamente a mais manifesta das impossibilidades.

O que acabamos de dizer basta para estabelecer, sem deixar lugar à menor dúvida, e sem que tenha necessidade de entrar em nenhuma outra consideração, que não pode haver um infinito matemático ou quantitativo, que esta expressão não tem nenhum sentido, porque a quantidade mesma é uma determinação; o número, o espaço, o tempo,

---

[6] É em um sentido bastante próximo deste como Spinoza empregou mais tarde a expressão «infinito em seu gênero», que dá lugar naturalmente às mesmas objeções.

[7] Se pode dizer também que não deixa fora dele mais do que a impossibilidade, a qual, ao ser um puro nada, não poderia limitar-lhe de nenhuma maneira.

[8] Isto é igualmente verdade das determinações de ordem universal, e não já simplesmente geral, compreendido aí o Ser mesmo que é a primeira de todas as determinações; mas não há que dizer que esta consideração não intervém nas aplicações unicamente cosmológicas das que vamos ocupar-nos no presente estudo.

[9] Se alguém estranha a expressão «semiprofano» que empregamos aqui, diríamos que pode justificar-se, de uma maneira muito precisa, pela distinção da iniciação efetiva e da iniciação simplesmente virtual, sobre a que teremos que nos explicar em outra ocasião.

aos que se quer aplicar a noção desse pretendido infinito, são condições determinadas, e que, como tais, não podem ser mais do que finitas; são, se se quer, certas possibilidades, ou certos conjuntos de possibilidades, junto aos quais e fora dos quais existem outros, o que implica evidentemente sua limitação. Neste caso, há ainda algo mais: conceber o Infinito quantitativamente, não só é limitar-lhe, senão que é também, por acréscimo, conceber-lhe como suscetível de aumento ou de diminuição, o que não é menos absurdo; com semelhantes considerações, chega-se a considerar rapidamente não só vários infinitos que coexistem sem confundir-se nem excluir-se, senão também infinitos que são maiores ou menores que outros infinitos, e inclusive, já que nestas condições o infinito tornou-se tão relativo que já não basta, inventa-se o «transfinito», isto é, o domínio das quantidades maiores que o infinito; e, efetivamente, é de uma «invenção» do que se trata propriamente então, já que tais concepções não poderiam corresponder a nada real: ¡A tantas palavras, outras tantas absurdidades, inclusive a respeito da simples lógica elementar, o que não impede que, entre aqueles que as sustentam, encontrem-se quem têm a pretensão de ser «especialistas» da lógica, tão grande é a confusão intelectual de nossa época!

Devemos fazer observar que faz um momento dissemos, não só «conceber um infinito quantitativo», senão «conceber o Infinito quantitativamente», e isto requer algumas palavras de explicação: com isso quisemos fazer alusão mais particularmente àqueles que, na gíria filosófica contemporânea, chamam-se os «infinitistas»; efetivamente, todas as discussões entre «finitistas» e «infinitistas» mostram claramente que uns e outros têm ao menos em comum esta idéia completamente falsa de que o Infinito metafísico é solidário do infinito matemático, se é que inclusive não se identifica com ele pura e simplesmente[10]. Por conseguinte, todos ignoram igualmente os princípios mais elementares da metafísica, já que é, ao contrário, a concepção mesma do verdadeiro Infinito metafísico a única que permite rechaçar de uma maneira absoluta todo «infinito particular», se pode-se expressar assim, tal como o pretendido infinito quantitativo, e estar seguro de antemão de que, por todas partes onde se lhe encontre, não pode ser mais do que uma ilusão, a cujo respeito já não terá mais que se perguntar o que pôde dar-lhe nascimento, a fim de poder substituí-la por outra noção mais conforme à verdade. Em suma, toda vez que se trate de uma coisa particular, de uma possibilidade determinada, por isso mesmo estamos certos *a priori* de que é limitada, e, podemos dizer, limitada por sua natureza mesma, e isto permanece igualmente verdadeiro no caso onde, por uma razão qualquer, não podemos alcançar atualmente seus limites; mas é precisamente esta impossibilidade de alcançar os limites de algumas coisas, e inclusive às vezes de concebê-los claramente, a que causa, ao menos naqueles a quem lhes falta o princípio metafísico, a ilusão de que essas coisas não têm limites, e, repetimo-lo ainda, é

[10] Aqui citaremos só, como exemplo característico, o caso de L. Couturat que conclui sua tese *De l'infini mathématique*, na que se esforçou em provar a existência de um infinito de número e de magnitude, declarando que sua intenção nisso foi mostrar que, ¡«apesar do neocriticismo (isto é, das teorias de Renouvier e de sua escola), é provável uma metafísica infinitista»!

esta ilusão, e nada mais, a que se formula na afirmação contraditória de um «infinito determinado».

É aqui onde intervém, para retificar essa falsa noção, ou mais corretamente para substituí-la por uma concepção verdadeira das coisas[11], a idéia do indefinido, que é precisamente a idéia de um desenvolvimento de possibilidades cujos limites não podemos alcançar atualmente; e por isso consideramos como fundamental, em todas as questões onde aparece o pretendido infinito matemático, a distinção do Infinito e do indefinido. É sem dúvida a isso ao que respondia, na intenção de seus autores, a distinção escolástica de *infinitum absolutum* e do *infinitum secundum quid*; e é certamente deplorável que Leibnitz, que não obstante tomou tanto da escolástica, tenha descuidado ou ignorado esta, já que, por imperfeita que fosse a forma sob a que estava expressada, tivesse podido servir-lhe para responder bastante facilmente a certas objeções suscitadas contra seu método. Pelo contrário, parece que Descartes tinha tentado estabelecer a distinção de que se trata, mas está muito longe de tê-la expressado e inclusive concebido com uma precisão suficiente, já que, segundo ele, o indefinido é aquilo cujos limites não vemos, e que em realidade poderia ser infinito, ainda que não possamos afirmar que o seja, enquanto a verdade é que, ao contrário, podemos afirmar que não o é, e que não há necessidade nenhuma de ver seus limites para estar certos de que esses limites existem; por conseguinte, vê-se quanto vago e embaralhado está tudo isto, e sempre por causa da mesma falta de princípio. Descartes diz efetivamente: «E para nós, ao ver coisas nas que, segundo alguns sentidos[12], não observamos limites, não asseguramos por isso que sejam infinitas, senão que as estimaremos somente indefinidas[13]». E dá como exemplos disso a extensão e a divisibilidade dos corpos; não assegura que estas coisas sejam infinitas, mas não obstante não parece também não querer negá-lo formalmente, tanto mais quanto que chega a declarar que não quer «enredar-se nas disputas do infinito», o que é uma maneira demasiado simples de evitar as dificuldades, e ainda que diga um pouco mais adiante que «conquanto observamos nelas propriedades que nos parecem não ter limites, não deixaremos de reconhecer que isso procede do defeito de nosso entendimento, e não de sua natureza»[14]. Em suma, com justa razão, quer reservar o nome de infinito ao que não pode ter nenhum limite; mas,

---

[11] Em todo rigor lógico, há lugar a fazer uma distinção entre «falsa noção» (ou, se se quer, «pseudo-noção») e «noção falsa»: uma «noção falsa» é a que não corresponde adequadamente à realidade, ainda que se lhe corresponde não obstante numa certa medida; ao contrário, uma «falsa noção» é a que implica contradição, como é o caso aqui, e a que assim não é verdadeiramente uma noção, nem sequer falsa, ainda que tenha a aparência disso para os que não se dão conta da contradição, já que não expressa mais do que o impossível, que é o mesmo que nada, não corresponde absolutamente a nada; uma «noção falsa» é susceptível de ser retificada, mas uma «falsa noção» não pode ser mais do que rechaçada pura e simplesmente.

[12] Estes termos parecem querer recordar o *secundum quid* escolástico e assim, pudesse ser que a intenção primeira da frase que citamos tenha sido criticar indiretamente a expressão *infinitum secundum quid.*

[13] *Principes de la Philosophie*, I, 26.

[14] *Ibid.*, I, 27.

por uma parte, não parece saber, com a certeza absoluta que implica todo conhecimento metafísico, que o que não tem nenhum limite não pode ser nada mais que o Todo universal, e por outra, a noção mesma do indefinido tem necessidade de ser precisada muito mais do que aquela que ele precisa; se o tivesse sido, sem dúvida um grande número de confusões ulteriores não se teriam produzido tão facilmente[15].

Dizemos que o indefinido não pode ser infinito, porque seu conceito implica sempre uma certa determinação, já se trate da extensão, da duração, da divisibilidade, ou de qualquer outra possibilidade; numa palavra, o indefinido, qualquer que seja e sob qualquer aspecto que se o considere, é ainda finito e não pode ser mais do que finito. Sem dúvida, seus limites se afastam até encontrar-se fora de nosso alcance, ao menos enquanto busquemos alcançá-los de uma certa maneira que podemos chamar «analítica», assim como o explicaremos mais completamente a seguir; mas por isso não são suprimidos de nenhuma maneira, e, em todo caso, se as limitações de uma certa ordem podem ser suprimidas, subsistem ainda outras, que estão na natureza mesma do que se considera, já que é em virtude de sua natureza, e não simplesmente de alguma circunstância mais ou menos exterior e acidental, pelo que toda coisa particular é finita, e isso, seja qual seja o grau a que possa ser levada efetivamente a extensão da que é suscetível. Se pode destacar a este propósito que o signo ∞, pelo que os matemáticos representam seu pretendido infinito, é ele mesmo uma figura fechada, e portanto, visivelmente finita, tanto como o é o círculo do que alguns quiseram fazer um símbolo da eternidade, enquanto não pode ser mais do que uma figuração de um ciclo temporário, indefinido somente em sua ordem, isto é, na ordem do que se chama propriamente a perpetuidade[16]; e é fácil ver que esta confusão da eternidade e da perpetuidade, tão comum entre os Ocidentais modernos, se parece estreitamente à do Infinito e do indefinido.

Para fazer compreender melhor a idéia do indefinido e a maneira em que este se forma a partir do finito entendido em sua acepção ordinária, pode-se considerar um exemplo tal como a sucessão dos números: nesta, evidentemente não é possível nunca deter-se em um ponto determinado, já que, depois de todo número, há sempre outro que se obtém agregando-lhe a unidade; portanto, é mister que a limitação dessa sucessão indefinida seja de uma ordem diferente do que se aplica a um conjunto definido de números, tomados entre dois números determinados quaisquer; por conseguinte, é mister que essa limitação esteja, não em algumas propriedades particulares de certos

---

[15] É assim como Varignon, em sua correspondência com Leibnitz, a respeito do cálculo infinitesimal, emprega indistintamente as palavras «infinito» e «indefinido», como se fossem mais ou menos sinônimos, ou como se ao menos fora em certo modo indiferente tomar um por outro, enquanto, ao contrário, é a diferença de suas significações a que, em todas estas discussões, tivesse devido ser considerada como o ponto essencial.

[16] Convém observar também que, como o explicamos em outra parte, um tal ciclo não é nunca verdadeiramente fechado, senão que parece sê-lo somente enquanto um se coloca numa perspectiva que não permite perceber a distância que existe realmente entre suas extremidades, de igual modo que uma espiral de hélice, segundo o eixo vertical, aparece como um círculo quando é projetada sobre o plano horizontal.

números, senão na natureza mesma do número em toda sua generalidade, isto é, na determinação que, ao constituir essencialmente esta natureza, faz ao mesmo tempo que o número seja o que é e que não seja outra coisa. Poderia repetir-se exatamente a mesma observação se se tratasse, não já do número, senão do espaço ou do tempo considerados igualmente em toda a extensão da que são suscetíveis[17]; essa extensão, por indefinida que se a conceba e que o seja efetivamente, não poderá fazer-nos sair nunca de nenhuma maneira do finito. É que, efetivamente, enquanto o finito pressupõe necessariamente o Infinito, já que este é o que compreende e envolve todas as possibilidades, o indefinido procede ao contrário do finito, do que não é em realidade mais do que um desenvolvimento, e ao que, por conseguinte, é sempre redutível, já que é evidente que não se pode sacar do finito, por qualquer processo que seja, nada mais que o que já estava contido nele potencialmente. Para retomar o mesmo exemplo da sucessão dos números, podemos dizer que esta sucessão, com toda a indefinidade que implica, nos está dada por sua lei de formação, já que é desta lei mesma de onde resulta imediatamente sua indefinidade; agora bem, esta lei consiste em que, dado um número qualquer, se formará o número seguinte agregando-lhe a unidade. Por conseguinte, a sucessão dos números se forma por adições sucessivas da unidade a si mesma indefinidamente repetida, o que, no fundo, nada mais é do que a extensão indefinida do procedimento de formação de uma soma aritmética qualquer; e aqui se vê muito claramente como o indefinido se forma a partir do finito. Ademais, este exemplo deve sua clareza particular ao caráter descontínuo da continuidade numérica; mas, para tomar as coisas de uma maneira mais geral e aplicável a todos os casos, bastaria, a este respeito, insistir sobre a idéia de «devir» que está implicada pelo termo «indefinido», e que expressamos mais atrás ao falar de um desenvolvimento de possibilidades, desenvolvimento que, em si mesmo e em todo seu curso, implica sempre algo de inacabado[18]; a importância da consideração das «variáveis», no que diz respeito ao cálculo infinitesimal, dará a este último ponto toda sua significação.

[17] Por conseguinte, não serviria de nada dizer que o espaço, por exemplo, não poderia estar limitado mais do que por algo que seria também o espaço, de sorte que o espaço em geral já não poderia estar limitado por nada; ao contrário, está limitado pela determinação mesma que constitui sua natureza própria enquanto espaço, e que deixa lugar, fora dele, a todas as possibilidades não espaciais.

[18] Cf. a precisão de A. K. Coomaraswamy sobre o conceito platônico de «medida», que citamos em outra parte (*O Reino da Quantidade e os Sinais dos Tempos*, cap. III): O «não medido» é o que ainda não foi definido, isto é, em suma o indefinido, e é, ao mesmo tempo e por isso mesmo, o que não está mais do que incompletamente realizado na manifestação.

CAPÍTULO II

A CONTRADIÇÃO DO "NÚMERO INFINITO"

Como o veremos ainda mais claramente a seguir, há casos em que basta substituir a idéia do pretendido infinito pela do indefinido para fazer desaparecer imediatamente toda dificuldade, mas há outros onde isso mesmo não é possível, porque se trata de algo claramente determinado, «fixado» de alguma maneira por hipótese, e que como tal, não pode chamar-se indefinido, segundo a observação que fizemos em último lugar: assim, por exemplo, pode-se dizer que a sucessão dos números é indefinida, mas não se pode dizer que um certo número, por grande que se lhe suponha e qualquer que seja a posição que ocupe nesta sucessão, é indefinido. A idéia do «número infinito», entendida como o «maior de todos os números», ou «o número de todos os números», ou também o «número de todas as unidades», é uma idéia verdadeiramente contraditória em si mesma, cuja impossibilidade subsistiria inclusive se se renunciasse ao emprego injustificável da palavra «infinito»: não pode haver um número que seja maior que todos os demais, já que, por grande que seja um número, sempre se pode formar um maior agregando-lhe a unidade, conformemente à lei de formação que formulamos mais atrás. Isso equivale a dizer que a sucessão dos números não pode ter um último termo, e é precisamente porque não está «terminada» pelo que é verdadeiramente indefinida; como o número de todos seus termos não poderia ser mais do que o último dentre eles, não se pode dizer tampouco que não é «numerável»[19], e essa é uma idéia sobre a qual teremos que voltar mais amplamente a seguir.

A impossibilidade do «número infinito» pode estabelecer-se ainda com diversos argumentos; Leibnitz, que ao menos a reconhecia muito claramente[20], empregava o que consiste em comparar a sucessão dos números pares à de todos os números inteiros: a todo número corresponde outro número que é igual ao seu dobro, de sorte que se podem fazer corresponder as duas sucessões termo a termo, de onde resulta que o número dos termos deve ser o mesmo em um e outro caso; mas, por outra parte, evidentemente há mais duas vezes números inteiros que números pares, já que os números pares se colocam de dois em dois na sucessão dos números inteiros; portanto, assim se conclui numa contradição manifesta. Pode-se generalizar este argumento tomando, em lugar da sucessão dos números pares, isto é, dos múltiplos de dois, a dos múltiplos de um número qualquer, e o raciocínio é idêntico; pode-se tomar também da mesma maneira a

---

[19] Numerável: que pode ser numerado. Aurélio digital. N. do t.

[20] «Apesar de meu cálculo infinitesimal, escrevia concretamente, eu não admito nenhum verdadeiro número infinito, ainda que confesso que a multidão das coisas ultrapassa todo número finito, ou mais corretamente todo número».

sucessão dos quadrados dos números inteiros[21], ou mais geralmente, a de suas potências de um expoente qualquer. Em todos os casos, a conclusão à que se chega é sempre a mesma: uma sucessão que não compreende mais do que uma parte dos números inteiros deveria ter o mesmo número de termos que a que os compreende a todos, o que equivaleria a dizer que o todo não seria maior que sua parte; e, desde que se admite que há um número de todos os números, é impossível escapar a esta contradição. Não obstante, alguns creram poder escapar a ela admitindo, ao mesmo tempo, que há números a partir dos quais a multiplicação por um certo número ou a elevação a uma certa potência já não seria possível, porque daria um resultado que ultrapassaria o pretendido «número infinito»; há inclusive quem foram conduzidos a considerar efetivamente números chamados «maiores que o infinito», de onde teorias como a do «transfinito» de Cantor, que podem ser muito engenhosas, mas que por isso não são mais válidas logicamente[22]: ¿é concebível que se possa pensar em chamar «infinito» a um número que, ao contrário, é tão «finito» que não é nem sequer o maior de todos? Ademais, com semelhantes teorias, haviam números os quais nenhuma das regras do cálculo ordinário se aplicariam já, isto é, em suma, números que não seriam verdadeiramente números, e que não seriam chamados assim mais do que por convenção[23]; é o que ocorre forçosamente quando, ao buscar conceber o «número infinito» de outro modo que como o maior dos números, consideram-se diferentes «números infinitos», supostos desiguais entre si, e aos que se atribuem propriedades que já não têm nada em comum com as dos números ordinários; assim, não se escapa a uma contradição mais do que para cair em outras, e no fundo, tudo isso nada mais é do que o produto do «convencionalismo» mais vazio de sentido que se pode imaginar.

Assim, a idéia do pretendido «número infinito», de qualquer maneira que se apresente e por qualquer nome que se a queira designar, contém sempre elementos contraditórios; ademais, não há nenhuma necessidade dessa suposição absurda desde que se faça uma justa concepção do que é realmente a indefinidade do número, e desde que se reconhece ademais que o número, apesar de sua indefinidade, não é aplicável de nenhuma maneira a tudo o que existe. Não vamos insistir aqui sobre este último ponto, já que o explicamos suficientemente em outra parte: o número nada mais é do que um modo da quantidade, e a quantidade mesma nada mais é do que uma categoria ou um

---

[21] Isto é o que fazia Cauchy, que, Ademais, atribuía este argumento a Galileu (*Sept leçons de Physique générale*, 3ª lição).

[22] Já, na época de Leibnitz, Wallis considerava «*spatia plus quam infinita*»; esta opinião, denunciada por Varignon como implicando contradição, foi sustentada igualmente por Guido Grandi em seu livro *De Infinitis infinitorum*. Por outra parte, Jean Bernoulli, no curso de suas discussões com Leibnitz, escrevia: «*Si dantur termini infiniti, datibur etiam terminus infinitesimus* (*non dico ultimus*) *et qui eum sequuntu* », o que, ainda que não se explique mais claramente aí, parece indicar que admitia que possa haver numa série numérica termos «além do infinito».

[23] Nisso não se pode dizer de nenhuma maneira que se trate de um emprego analógico da idéia do número, já que isto suporia uma transposição a um domínio diferente do da quantidade, e, ao contrário, é à quantidade, entendida em seu sentido mais literal, à que se referem exclusivamente todas as considerações deste tipo.

modo especial do ser, não coextensivo[24] deste, ou, mais precisamente ainda, nada mais é do que uma condição própria de um certo estado de existência no conjunto da existência universal; mas é isso justamente o que a maioria dos modernos têm dificuldade para compreender, habituados como estão a querer reduzir tudo à quantidade e inclusive avaliar tudo numericamente[25]. Não obstante, no domínio mesmo da quantidade há coisas que escapam ao número, assim como o veremos quando tratemos do contínuo; e inclusive, sem sair da consideração da quantidade descontínua, um[26] está já forçado a admitir, ao menos implicitamente, que o número não é aplicável a tudo, quando se reconhece que a multidão de todos os números não pode constituir um número, o que, ademais, não é em suma mais do que uma aplicação da verdade incontestável de que o que limita uma certa ordem de possibilidades deve estar necessariamente fora e além dessa ordem[27]. Somente, deve entender-se bem que uma tal multidão, já se a considere no descontínuo, como no caso quando se trata da sucessão dos números, ou já se a considere no contínuo, sobre o que teremos que voltar um pouco mais adiante, não pode ser chamada de nenhuma maneira infinita, e que nisso não se trata mais do que do indefinido; ademais, é esta noção de multidão o que vamos ter que examinar agora mais de perto.

---

[24] Coextensivo: commensurate, corresponding, proportionate, relative; comensurável, correspondente, **proporcional**, relativo. Fonte:*http://www.babylon.com/definition/coextensivo/Spanish?uil=English*. Nota do tradutor.

[25] É assim como Renouvier pensava que o número é aplicável a tudo, ao menos idealmente, isto é, que tudo é «numerável» em si mesmo, ainda que nós sejamos incapazes de «numerá-lo» efetivamente; também se equivocou completamente sobre o sentido que Leibnitz dá à noção da «multidão», e nunca pôde compreender como a distinção desta com o número permite escapar à contradição do «número infinito».

[26] “Um” é usado aqui e em outras passagens como “algo” ou “alguém”.

[27] Dissemos, no entanto, que uma coisa particular ou determinada, qualquer que seja, está limitada por sua natureza mesma, mas nisso não há absolutamente nenhuma contradição: efetivamente, é pelo lado negativo desta natureza como ela está limitada (já que, como disse Spinoza, «*omnis determinatio negatio est*»), isto é, enquanto esta exclui às demais coisas e as deixa fora dela, de sorte que, em definitivo, é a coexistência dessas outras coisas a que limita à coisa considerada; ademais, é pelo que o Todo universal, e só ele, não pode ser limitado por nada.

CAPÍTULO III

A MULTIDÃO INUMERÁVEL

Como vimos, Leibniz não admite de nenhum modo o «número infinito», já que, ao contrário, declarava expressamente que este, em qualquer sentido que se lhe queira entender, implica contradição; mas pelo contrário, admite o que chama uma «multidão infinita», sem precisar sequer, como o teriam feito ao menos os escolásticos, que, em todo caso, isso não pode ser mais do que um *infinitum secundum quid*; e, para ele, a sucessão dos números é um exemplo de uma tal multidão. No entanto, por outro lado, no domínio quantitativo, e inclusive no que diz respeito à magnitude contínua, a idéia do infinito lhe parece sempre suspeita de contradição ao menos possível, já que, longe de ser uma idéia adequada, implica inevitavelmente uma certa parte de confusão, e nós não podemos estar certos de que uma idéia não implica nenhuma contradição mais do que quando concebemos distintamente todos seus elementos[28]; isto apenas permite convir a essa idéia mais do que um caráter «simbólico», diríamos mais bem «representativo», e é por isso que Leibniz não se atreveu nunca, assim como o veremos mais adiante, a pronunciar-se claramente sobre a realidade dos «infinitamente pequenos»; mas esta dificuldade mesma e esta atitude dubitativa fazem que se destaque melhor ainda a falta de princípio que lhe fazia admitir que se possa falar de uma «multidão infinita». Poderia-se perguntar também, depois disso, se não pensava que uma tal multidão, para ser «infinita» como ele diz, não só não devia ser «numerável», o que é evidente, senão que nem sequer devia ser de nenhuma maneira quantitativa, tomando a quantidade em toda sua extensão e sob todos seus modos; isso poderia ser verdade em alguns casos, mas não em todos; seja o que seja, esse é também um ponto sobre o que nunca se explicou claramente.

A idéia de uma multidão que ultrapassa todo número, e que portanto não é um número, parece ter surpreendido à maioria daqueles que discutiram as concepções de Leibniz, já sejam «finitistas» ou «infinitistas»; no entanto, esta idéia está longe de ser própria de Leibniz como parecem tê-lo crido geralmente, e, antes ao contrário, era uma

---

[28] Descartes falava só de «idéias claras e diferentes»; Leibniz precisa que uma idéia pode ser clara sem ser distinta, só se permite reconhecer seu objeto e distinguir-lhe de todas as demais coisas, enquanto uma idéia distinta é a que não só é «distinguível» neste sentido, senão «distinguida» em seus elementos; ademais, uma idéia pode ser mais ou menos distinta, e a idéia adequada é a que o é completamente e em todos seus elementos; mas, enquanto Descartes cria que se podiam ter idéias «claras e distintas» de todas as coisas, Leibniz estima ao contrário que as idéias matemáticas são as únicas que podem ser adequadas, já que seus elementos são em certo modo em número definido, enquanto todas as demais idéias envolvem uma multidão de elementos cujo análise não pode ser acabada nunca, de tal sorte que as mesmas permanecem sempre parcialmente confusas.

idéia completamente corrente nos escolásticos[29]. Esta idéia se entendia propriamente de tudo o que não é nem número nem «numerável», isto é, de tudo o que não depende da quantidade descontínua, já se trate de coisas que pertencem a outros modos da quantidade ou do que está inteiramente fora do domínio quantitativo, já se trate de uma idéia da ordem dos «transcendentais», isto é, dos modos gerais do ser, que, contrariamente a seus modos especiais como a quantidade, lhe são coextensivos[30]. É o que permite falar, por exemplo, da multidão dos atributos divinos, ou também da multidão dos anjos, isto é, de seres que pertencem a estados que não estão submetidos à quantidade e onde, portanto, não pode tratar-se de número; é também o que nos permite considerar os estados do ser ou os graus da existência como sendo em multiplicidade ou em multidão indefinida, enquanto a quantidade nada mais é do que uma condição especial de um só dentre eles. Por outra parte, já que a idéia de multidão, contrariamente à de número, é aplicável a tudo o que existe, deve haver forçosamente multidões de ordem quantitativa, concretamente no que diz respeito à quantidade contínua, e é por isso pelo que dizíamos faz um momento que não seria verdadeiro considerar, em todos os casos, a suposta «multidão infinita», isto é, a que ultrapassa todo número, como escapando inteiramente ao domínio da quantidade. Ademais, o número mesmo pode ser considerado também como uma espécie de multidão, mas na condição de agregar que, segundo a expressão de Santo Tomás de Aquino, é uma «multidão medida pela unidade»; já que toda outra sorte de multidão não é «numerável», é «não medida», isto é, que não é infinita, senão propriamente indefinida.

A este propósito, convém observar um fato bastante singular: para Leibnitz, esta multidão, que não constitui um número, é não obstante um «resultado das unidades»[31]; ¿que é mister entender por isso, e de que unidades pode tratar-se? Esta palavra unidade pode tomar-se em dois sentidos completamente diferentes: por uma parte, há a unidade aritmética ou quantitativa, que é o elemento primeiro e o ponto de partida do número, e, por outra, o que se designa analogicamente como a Unidade metafísica, que se identifica ao Ser puro mesmo; não vemos que tenha nenhuma outra acepção possível fora destas; mas, ademais, quando se fala das «unidades», empregando esta palavra em plural, isso não pode ser evidentemente mais do que no sentido quantitativo. Unicamente, se isso é assim, a soma das unidades não pode ser outra coisa que um número, e não pode ultrapassar de nenhuma maneira o número; é certo que Leibnitz diz «resultado» e não «soma», mas esta distinção, inclusive se é querida expressamente, por isso não deixa subsistir menos uma enojosa obscuridade. Ademais, declara em outra

[29] Citaremos só um texto tomado entre muitos outros, e que é particularmente claro a este respeito: «*Qui diceret aliquan multitudinem esse infinitam, nom diceret eam esse numerum, vel numerum habere; addit etiam numerus super multitudinem rationem mensurationis. Est enim numerus multitudo mensurata per unum,...et propter hoc numerus ponitur species quantitatis discretae, non autem multitudo, sed est de transcendentibus*» (Santo Tomás de Aquino, in III *Phys*., 1, 8).

[30] Se sabe que os escolásticos, inclusive na parte propriamente metafísica de suas doutrinas, nunca foram além da consideração do Ser, de sorte que, de fato, a metafísica se reduz para eles unicamente à ontologia.

[31] Système nouveau de la nature et de la communication des substances.

parte que a multidão, sem ser um número, concebe-se não obstante por analogia com o número: «Quando há mais coisas, diz, das que podem ser compreendidas por nenhum número, não obstante nós lhes atribuímos analogicamente um número, que chamamos "infinito", ainda que não se trate mais do que uma "maneira de falar", um *modus loquendi*[32], e inclusive, sob esta forma, uma maneira de falar muito incorreta, já que, em realidade, isso não é de nenhuma maneira um número; mas, quaisquer que sejam as imperfeições da expressão e as confusões às que pode dar lugar, devemos admitir, em todo caso, que uma identificação da multidão com o número não estava certamente no fundo de seu pensamento.

Outro ponto ao que Leibnitz parece prestar uma grande importância, é que o «infinito», tal como o concebe, não constitui um todo[33]; esta é uma condição que ele considera como necessária para que esta idéia escape à contradição, mas se trata de outro ponto que não deixa de ser também marcadamente obscuro. Cabe perguntar-se de que sorte de «todo» se trata aqui, e, primeiramente, é mister descartar inteiramente a idéia do Todo universal, que, ao contrário, como o dissemos desde o começo, é o Infinito metafísico mesmo, isto é, o único verdadeiro Infinito, e que não poderia estar em causa aqui de nenhuma maneira; efetivamente, já se trate do contínuo ou do descontínuo, a «multidão infinita» que considera Leibnitz fica, em todos os casos, em um domínio restringido e contingente, de ordem cosmológico e não metafísico. Ademais, trata-se evidentemente de um todo concebido como composto de partes, enquanto, assim como o explicamos em outra parte[34], o Todo universal é propriamente «sem partes», em razão mesma de sua infinitude, já que, devendo essas partes ser necessariamente relativas e finitas, não poderiam ter com ele nenhuma relação real, o que equivale a dizer que não existem para ele. Portanto, quanto à questão proposta, devemos limitar-nos à consideração de um todo particular; mas aqui também, e precisamente no que diz respeito ao modo de composição de um tal todo e a sua relação com suas partes, há que considerar dois casos, que correspondem a duas acepções muito diferentes desta mesma palavra «todo». Primeiramente, se se trata de um todo que não é nada mais que a simples soma de suas partes, das que está composto à maneira de uma soma aritmética, o que diz Leibnitz é evidente no fundo, já que esse modo de formação é precisamente o que é próprio do número, e não nos permite ultrapassar o número; mas, a dizer verdade, esta noção, longe de representar a única maneira em que pode conceber-se um todo, não é sequer a de um todo verdadeiro no sentido mais rigoroso desta palavra. Efetivamente, um todo que não é assim mais do que a soma ou o

---

[32] *Obsevatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores, et de vero sensu Methodi infinitesimalis*, en las *Acta Eruditorum* de Leipzig, 1712

[33] Cf. concretamente *ibid*.: «*Infinitum continuum vel discretum proprie nec unum, nec totum, nec quantum est*», onde a expressão «*nec quantum*» parece querer dizer que para ele, como o indicamos mais atrás, a «multidão infinita» não deve ser concebida quantitativamente, a menos, não obstante, de que por *quantum* não tenha entendido somente aqui uma quantidade definida, como o havia sido o pretendido «número infinito» cuja contradição demonstrou.

[34] Sobre este ponto, ver também *Los Estados múltiples del ser*, cap. I.

resultado de suas partes, e que, portanto, é logicamente posterior a estas, não é outra coisa, enquanto todo, que um *ens rationis*, já que não é «um» e «todo» mais do que na medida em que lhe concebemos como tal; em si mesmo, não é, falando propriamente, mais do que uma «coleção», e somos nós quem, pela maneira que lhe consideramos, conferimos-lhe, em um certo sentido relativo, os caracteres de unidade e de totalidade. Ao contrário, um todo verdadeiro, que possui esses caracteres por sua natureza mesma, deve ser logicamente anterior a suas partes e ser independente delas: tal é o caso de um conjunto contínuo, que podemos dividir em partes arbitrárias, isto é, de uma magnitude qualquer, mas que não pressupõe de nenhuma maneira a existência efetiva dessas partes; aqui, somos nós quem damos às partes como tal uma realidade, por uma divisão ideal ou efetiva, e assim este caso é exatamente inverso do precedente.

Agora, toda a questão se reduz em suma a saber se, quando Leibnitz diz que «o infinito não é um todo», exclui este segundo sentido tanto como o primeiro; assim o parece, e inclusive isso é provável, já que é o único caso em que um todo é verdadeiramente «um», e em que o infinito, segundo ele, não é *nec unum*, *nec totum*. O que o confirma também, é que este caso, e não no primeiro, é o que se aplica a um ser vivo ou a um organismo quando se lhe considera desde o ponto de vista da totalidade; agora bem, Leibnitz diz: «Inclusive o Universo não é um todo, e não deve ser concebido como um animal cuja alma é Deus, assim como o faziam os antigos»[35]. No entanto, se isso é assim, não se vê demasiado como as idéias do infinito e do contínuo podem estar conectadas como o estão muito freqüentemente para ele, já que a idéia do contínuo se vincula precisamente, em um certo sentido ao menos, a esta segunda concepção da totalidade; mas este é um ponto que poderá compreender-se melhor a seguir. O que é certo em todo caso, é que, se Leibnitz tivesse concebido o terceiro sentido da palavra «todo», sentido puramente metafísico e superior aos outros dois, isto é, a idéia do Todo universal tal como a propusemos primeiro, não teria podido dizer que a idéia do infinito exclui a totalidade, já que declara: «O infinito real é, quiçá, o absoluto mesmo, que não está composto de partes, mas que, tendo partes, as compreende por razão eminente e como no grau de perfeição»[36]. Aqui há ao menos um «vislumbre», se poderia dizer, já que esta vez, como por exceção, toma a palavra «infinito» em seu verdadeiro sentido, ainda que seja errôneo dizer que este infinito «tem partes», de qualquer maneira que se o queira entender; mas é estranho que tampouco então, expresse seu pensamento mais do que sob uma forma duvidosa e indecisa, como se não estivesse exatamente fixado sobre a significação desta idéia; e quiçá não tivesse estado nunca efetivamente, já que de outro modo não se explicaria que a tenha desviado tão freqüentemente de seu sentido

---

[35] Carta a Jean Bernoulli. — Leibnitz presta aqui, muito gratuitamente aos antigos em geral, uma opinião que, em realidade, não foi mais do que a de alguns dentre eles; tem manifestamente em vista a teoria dos Estóicos, que concebiam a Deus como unicamente imanente e lhe identificavam ao *Anima Mundi*. Ademais, não há que dizer que aqui não se trata mais do que do Universo manifestado, isto é, do «Cosmos», e não do Todo universal que compreende todas as possibilidades, tanto não manifestadas como manifestadas.

[36] Carta a Jean Bernoulli, 7 de junho de 1698.

próprio, e que seja às vezes tão difícil, quando fala de infinito, saber se sua intenção foi tomar este termo «com rigor», ainda que fora equivocadamente, ou se não viu nele mais do que uma simples «maneira de falar».

CAPÍTULO IV

A MEDIDA DO CONTÍNUO

Até aqui, quando falamos do número, tivemos em vista exclusivamente o número inteiro, e isso devia ser assim logicamente, desde que consideramos a quantidade numérica como sendo propriamente a quantidade descontínua: na sucessão dos números inteiros, há sempre, entre dois termos consecutivos, um intervalo perfeitamente definido, que está marcado pela diferença de uma unidade existente entre esses dois números, e que, quando um se atém à consideração dos números inteiros, não pode ser reduzida de nenhuma maneira. Ademais, em realidade, o número inteiro é o único número verdadeiro, o que se poderia chamar o número puro; e, partindo da unidade, a série dos números inteiros vai crescendo indefinidamente, sem chegar nunca a um último termo cuja suposição, como já o temos visto, é contraditória; mas não há que dizer que se desenvolve toda inteira em um só sentido, e assim o outro sentido oposto, que seria o do indefinidamente decrescente, não pode encontrar sua representação nela, ainda que, desde outro ponto de vista, como o mostraremos mais adiante, tenha uma certa correlação e uma sorte de simetria entre a consideração das quantidades indefinidamente crescentes e a das quantidades indefinidamente decrescentes. No entanto, ninguém se ateu a isso, e se chegou a considerar diversas sortes de números, diferentes dos números inteiros; são, diz-se habitualmente, extensões ou generalizações da idéia de número, e isso é verdadeiro de uma certa maneira; mas, ao mesmo tempo, essas extensões são também alterações dessa idéia, e é isso o que os matemáticos modernos parecem esquecer muito facilmente, porque seu «convencionalismo» lhes faz desconhecer sua origem e sua razão de ser. De fato, os números que não são inteiros se apresentam sempre, antes de mais nada, como a figuração do resultado de operações que são impossíveis quando um se atém ao ponto de vista da aritmética pura, já que, em todo rigor, esta nada mais é do que a aritmética dos números inteiros: assim, por exemplo, um número fracionário não é outra coisa que a representação do resultado de uma divisão que não se efetua exatamente, isto é, em realidade de uma divisão que se deve chamar aritmeticamente impossível, o que, ademais, reconhece-se implicitamente ao dizer, segundo a terminologia matemática ordinária, que um dos dois números considerados não é divisível pelo outro. Desde agora devemos observar que a definição que se dá comumente dos números fracionários é absurda: as frações não podem ser de nenhuma maneira «partes da unidade», como se diz, já que a unidade aritmética verdadeira é necessariamente indivisível e sem partes; e, ademais, é disso de onde resulta a descontinuidade essencial do número que se forma a partir dela; mas vamos ver de onde provém esta absurdidade.

Efetivamente, não é, arbitrariamente, como se chega a considerar assim o resultado das operações de que acabamos de falar, em lugar de limitar-se a considerá-las pura e simplesmente como impossíveis; de uma maneira geral, isso é a consequência da aplicação que se faz do número, quantidade descontínua, à medida de magnitudes que, como as magnitudes espaciais por exemplo, são de ordem da quantidade contínua. Entre estes modos da quantidade, há uma diferença de natureza tal que a correspondência de uma e outra não poderia estabelecer-se perfeitamente; para remediar até um certo ponto, e enquanto seja possível ao menos, procura-se reduzir de alguma maneira os intervalos deste descontínuo que está constituído pela série dos números inteiros, introduzindo entre seus termos outros números, e primeiramente números fracionários, que não teriam nenhum sentido fora desta consideração. Desde então é fácil compreender que a absurdidade que assinalávamos faz um momento, no que diz respeito à definição das frações, provém simplesmente de uma confusão entre a unidade aritmética e o que se chama as «unidades de medida», unidades que não são tais mais do que convencionalmente, e que são em realidade magnitudes de outro tipo que o número, concretamente magnitudes geométricas. A unidade de longitude, por exemplo, nada mais é do que uma certa longitude escolhida por razões estranhas à aritmética, e à que se faz corresponder o número 1 a fim de poder medir em relação a ela todas as demais longitudes; mas, por sua natureza mesma de magnitude contínua, toda longitude, ainda que seja representada assim numericamente pela unidade, por isso não é menos divisível sempre e indefinidamente; por conseguinte, ao compará-la a outras longitudes que não sejam múltiplos exatos dela, se poderá ter que considerar partes desta unidade de medida, mas que, por isso, não serão de nenhuma maneira partes da unidade aritmética; e é só assim como se introduz realmente a consideração dos números fracionários, como representação de relações entre magnitudes que não são exatamente divisíveis umas pelas outras. A medida de uma magnitude não é efetivamente outra coisa que a expressão numérica de sua relação com outra magnitude da mesma espécie tomada como unidade de medida, isto é, no fundo, como termo de comparação; e é por isso pelo que o método ordinário de medida das magnitudes geométricas se funda essencialmente sobre a divisão.

Ademais, é mister dizer que, apesar disso, subsiste sempre forçosamente algo da natureza descontínua do número, que não permite que se obtenha assim um equivalente perfeito do contínuo; podem reduzir-se os intervalos tanto como se queira, isto é, em suma reduzi-los indefinidamente, fazendo-os menores que toda quantidade que se tenha dado de antemão, mas não se chegará nunca a suprimi-los inteiramente. Para fazê-lo compreender melhor, tomaremos o exemplo mais simples de um contínuo geométrico, isto é, uma linha reta: consideremos uma semi-reta que se estende indefinidamente em um certo sentido[37], e convenhamos fazer que corresponda a cada um de seus pontos o

[37] Se verá depois, a propósito da representação geométrica dos números negativos, porque não devemos considerar aqui mais do que uma semi-reta; ademais, o fato de que a série dos números não se desenvolva mais do que em um só sentido, assim como o dizíamos mais atrás, basta já para indicar a razão disso.

número que expressa a distância desse ponto à origem; este será representado por zero, já que sua distância a si mesmo é evidentemente nula; a partir dessa origem, os números inteiros corresponderão às extremidades sucessivas de segmentos todos iguais entre si e iguais à unidade de longitude; os pontos compreendidos entre estes não poderão ser representados mais do que por números fracionários, já que suas distâncias à origem não são múltiplos exatos da unidade de longitude. É evidente que à medida que se tomem números fracionários cujo denominador seja cada vez maior, e, portanto, cuja diferença seja cada vez menor, os intervalos entre os pontos aos que correspondem estes números se encontrarão reduzidos na mesma proporção; assim se pode fazer decrescer estes intervalos indefinidamente, teoricamente ao menos, já que os denominadores dos números fracionários possíveis são todos os números inteiros, cuja sucessão cresce indefinidamente[38]. Dizemos teoricamente, porque, de fato, já que a multidão dos números fracionários é indefinida, não se poderá chegar nunca a empregá-la assim toda inteira; mas suponhamos não obstante que se faça corresponder idealmente todos os números fracionários possíveis a pontos da semi-reta considerada: apesar do decrescimento indefinido dos intervalos, ficarão ainda nesta linha uma multidão de pontos aos que não corresponderá nenhum número. Isto pode parecer singular e inclusive paradoxal à primeira vista, e no entanto é fácil dar-se conta disso, já que um tal ponto pode ser obtido por meio de uma construção geométrica muito simples: construamos o quadrado que tenha por lado o segmento de reta cujas extremidades são os pontos zero e um, e tracemos a diagonal deste quadrado que parte da origem, e depois a circunferência que tem a origem como centro e esta diagonal como raio; o ponto onde esta circunferência corta a semi-reta não poderá ser representado por nenhum número inteiro ou fracionário, já que sua distância à origem é igual à diagonal do quadrado e já que esta é incomensurável com seu lado, isto é, aqui com a unidade de longitude. Assim, a multidão dos números fracionários, apesar do decrescimento indefinido de suas diferenças, não pode bastar ainda para encher, se se pode dizer, os intervalos entre os pontos contidos na linha[39], o que supõe dizer que esta multidão não é um equivalente real e adequado do contínuo linear; por conseguinte, para expressar a medida de algumas longitudes, estamos forçados a introduzir ainda outros tipos de números, que são o que se chama os números incomensuráveis, isto é, aqueles que não têm comum medida com a unidade. Tais são os números irracionais, isto é, aqueles que representam o resultado de uma extração de raiz aritmeticamente impossível, por exemplo a raiz quadrada de um número que não é um quadrado perfeito; é assim como, no exemplo precedente, a relação da diagonal do quadrado com seu lado, e portanto o ponto cuja distância à origem é igual a esta diagonal, não podem ser representados mais do que pelo número irracional

---

[38] Isto será precisado ainda quando falarmos dos números inversos.

[39] Importa destacar que não dizemos os pontos que compõem ou que constituem a linha, o que corresponderia a uma concepção falsa do contínuo, assim como o mostram as considerações que exporemos mais adiante.

$$\sqrt{2},$$

que é efetivamente verdadeiramente incomensurável, já que não existe nenhum número inteiro ou fracionário cujo quadrado seja igual a

$$2;$$

e, além destes números irracionais, há ainda outros números incomensuráveis cujo origem geométrica é evidente, como por exemplo o número

$$\pi$$

que representa a relação da circunferência com seu diâmetro. Sem entrar ainda na questão da «composição do contínuo», vê-se pois que o número, qualquer que seja a extensão que se dê a sua noção, não lhe é nunca perfeitamente aplicável: esta aplicação equivale em suma sempre a substituir o contínuo por um descontínuo cujos intervalos podem ser muito pequenos, e inclusive virem a ser cada vez menores por uma série indefinida de divisões sucessivas, mas sem poder ser suprimidos nunca, já que, em realidade, não há «últimos elementos» nos quais essas divisões podem concluir, já que, por pequena que seja, sempre fica uma quantidade contínua indefinidamente divisível. É a estas divisões do contínuo ao que responde propriamente a consideração dos números fracionários; mas, e isso é o que importa destacar particularmente, uma fração, por minúscula que seja, é sempre uma quantidade determinada, e entre duas frações, por pouco diferentes que se as suponha uma da outra, sempre há um intervalo igualmente determinado. Agora bem, a propriedade da divisibilidade indefinida que caracteriza as magnitudes contínuas exige evidentemente que se possam tomar sempre delas elementos tão pequenos como se queira, e que os intervalos que existem entre esses elementos possam fazer-se também menores que toda quantidade dada; mas ademais, e é aqui onde aparece a insuficiência dos números fracionários, e podemos dizer inclusive de todo número qualquer que seja, esses elementos e esses intervalos, para que tenha realmente continuidade, não devem ser concebidos como algo determinado. Portanto, a representação mais perfeita da quantidade contínua será obtida pela consideração de magnitudes, não já fixas e determinadas como as que acabamos de tratar, senão antes ao contrário, variáveis, porque então sua variação poderá considerar-se ela mesma como efetuando-se de uma maneira contínua; e estas quantidades deverão ser suscetíveis de decrescer indefinidamente, por sua variação, sem anular-se nunca nem chegar a um «mínimo», que não seria menos contraditório do que os «últimos elementos» do contínuo: essa é precisamente, como o veremos, a verdadeira noção das quantidades infinitesimais.

CAPÍTULO V

QUESTÕES ESTABELECIDAS PELO MÉTODO INFINITESIMAL

Quando Leibnitz deu a primeira exposição do método infinitesimal[40], e inclusive também em outros vários trabalhos que seguiram[41], insistiu sobretudo nos usos e nas aplicações do novo cálculo, o que era bastante conforme à tendência moderna de atribuir mais importância às aplicações práticas da ciência que à ciência mesma como tal; ademais, seria difícil dizer se esta tendência existia verdadeiramente em Leibnitz, ou se, nesta maneira de apresentar seu método, não havia mais do que um modo de concessão por sua parte. Seja como seja, para justificar um método, não basta certamente mostrar as vantagens que pode ter sobre os demais métodos anteriormente admitidos, e as comodidades que pode proporcionar praticamente para o cálculo, nem tampouco os resultados que pôde dar de fato; é o que os adversários do método infinitesimal não deixaram de fazer valer, e são só suas objeções as que levaram a Leibnitz a explicar-se sobre os princípios, e inclusive sobre as origens de seu método. Ademais, sobre este último ponto, é muito possível que nunca o tenha dito tudo, mas isso importa pouco no fundo, já que, muito freqüentemente, as causas ocasionais de uma descoberta não são mais do que circunstâncias bastante insignificantes em si mesmas; em todo caso, tudo o que há que reter para nós nas indicações que dá sobre este ponto[42], é que partiu da consideração das diferenças «asignable»[43] que existem entre os números, para passar daí às diferenças «inasignable»[44] que podem ser concebidas entre as magnitudes geométricas em razão de sua continuidade, e que dava inclusive a esta ordem uma grande importância, como sendo em certo modo «exigido pela natureza das coisas». Daí resulta que as quantidades infinitesimais, para ele, não se apresentam naturalmente a nós de uma maneira imediata, senão só como um resultado da passagem da variação da quantidade descontínua à da quantidade contínua, e da aplicação da primeira à medida da segunda.

---

[40] *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qu nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, en las Acta eruditorum* de Leipzig, 1864.

[41] *De Geometría recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum*, 1886. — Os trabalhos seguintes se referem todos a solução de problemas particulares.

[42] Em sua correspondência primeiro, e depois em *Historia et origo Calculi differencialis*, 1714.

[43] Do espanhol Asignable: achacable: aplicable, atribuible, endosable, imputable: aplicável, **atribuível**, endosável, imputável. *http://www.wordreference.com/sinonimos*. Nota do tradutor.

[44] Inasignable: no asignable: no achacable: no aplicable, no atribuible, no endosable, no imputable: não aplicável, **não atribuível**, não endosável, não imputável. *http://www.wordreference.com/sinonimos*. "este termo parece não poder entender-se rigorosamente mais do que de quantidades que são suscetíveis de virem a ser tão pequenas como se queira, isto é, menores que toda quantidade dada, e às que, portanto, **não se pode «atribuir»** nenhum valor determinado, por pequeno que seja"(Leibnitz). Nota do tradutor.

Agora bem, ¿qual é exatamente a significação destas quantidades infinitesimais cujo emprego reprovou-se Leibnitz, sem haver definido previamente o que entendia por elas? e, ¿lhe permitia essa significação considerar seu cálculo como absolutamente rigoroso, ou apenas, ao contrário, como um simples método de aproximação? Responder a estas duas perguntas, seria resolver por isso mesmo as objeções mais importantes que se lhe tenham dirigido; mas, desafortunadamente, ele nunca o fez muito claramente, e inclusive suas diversas respostas não parecem sempre perfeitamente conciliáveis entre si. Ademais, a este propósito, é bom destacar que Leibnitz tinha, de uma maneira geral, o hábito de explicar diferentemente as mesmas coisas segundo as pessoas a quem se dirigia; certamente, não somos nós quem lhe reprovamos esta maneira de atuar, irritante somente para os espíritos sistemáticos, já que, em princípio, com isso não fazia mais que se conformar a um preceito iniciático e mais particularmente rosacruciano, segundo o qual convém falar a cada um sua própria linguagem; somente que às vezes lhe ocorria que lhe aplicava bastante mal. Efetivamente, se é evidentemente possível revestir uma mesma verdade de diferentes expressões, entenda-se bem que isso deve fazer-se sem deformá-la nem minguá-la nunca, e que é mister abster-se sempre cuidadosamente de toda maneira de falar que pudesse dar lugar a concepções falsas; isso é o que Leibnitz não soube fazer em muitos casos[45]. Por conseguinte, leva a «acomodação» parecer até dar, às vezes, a razão àqueles que não quiseram ver em seu cálculo mais do que um método de aproximação, já que lhe ocorre apresentar-lhe como não sendo outra coisa que uma maneira abreviada do «método de exaustão» dos antigos, próprio para facilitar as descobertas, mas cujos resultados devem ser depois verificados por esse método se se quer dar deles uma demonstração rigorosa; e, no entanto, é muito certo que esse não era o fundo de seu pensamento, e que, em realidade, via em seu método muito mais do que um simples expediente destinado a abreviar os cálculos.

Leibnitz declara freqüentemente que as quantidades infinitesimais não são mais do que «incomparáveis», mas, no que diz respeito ao sentido preciso no que deve entender-se esta palavra, ocorreu-lhe dar dela uma explicação não só pouco satisfatória, senão inclusive muito deplorável, já que com isso só podia proporcionar armas a seus adversários, que, ademais, não deixaram de servir-se delas; nisso também não expressou certamente seu verdadeiro pensamento, e podemos ver nisso outro exemplo, ainda mais grave do que o precedente, dessa «acomodação» excessiva que faz substituir uma expressão «adaptada» da verdade por pontos de vista errôneos. Efetivamente, Leibnitz escreveu isto: «Aqui não há necessidade de tomar o infinito rigorosamente, senão só como quando se diz em ótica que os raios do sol vêm de um ponto infinitamente afastado e assim são estimados paralelos. E quando há vários graus de infinito ou de infinitamente pequeno, é como o globo da terra fosse estimado como um ponto em

[45] Em linguagem rosacruciana, tanto mais pelo fracasso de seus projetos de «*characteristica universalis*», se diria que isso prova que se tinha alguma idéia teórica do que é o «dom de línguas», estava muito longe de ter-lhe recebido efetivamente.

relação à distância das estrelas fixas, e como uma bola, que manejamos, é ainda um ponto em comparação com o semidiâmetro do globo da terra, de maneira que a distância às estrelas fixas é como um infinito do infinito em relação ao diâmetro da bola. Já que em lugar de infinito ou de infinitamente pequeno, tomam-se quantidades tão grandes e tão pequenas como seja necessário para que o erro seja menor que o erro dado, de maneira que não se difere do estilo de Arquimedes mais do que nas expressões que são mais diretas em nosso método, e mais conformes à arte de inventar»[46]. Não se deixou de fazer observar a Leibnitz que, por pequeno que seja o globo da terra em relação ao firmamento, ou um grão de areia em relação ao globo da terra, por isso não são menos quantidades fixas e determinadas, e que, se uma destas quantidades pode ser considerada como praticamente desdenhável em comparação com a outra, nisso não se trata, não obstante, mais do que de uma simples aproximação; ele respondeu que só tinha desejado «evitar as sutilezas» e «fazer o raciocínio sensível a todo mundo»[47], o que confirma efetivamente nossa interpretação, e o que, ademais, é já como uma manifestação da tendência «vulgarizadora» dos sábios modernos. O que é bastante extraordinário, é que tenha podido escrever depois: «Ao menos não tinha a menor evidência que devesse se julgar que eu entendia uma quantidade muito pequena em verdade, mas sempre fixa e determinada», ao que acrescenta: «Ademais, já tinha escrito faz alguns anos a M. Bernoulli de Groningue que os infinitos e infinitamente pequenos podiam ser tomados por ficção, semelhantes às raízes imaginárias[48], sem que isso devesse causar prejuízo a nosso cálculo, já que essas ficções são úteis e estão fundadas na realidade»[49]. Ademais, parece que não tenha visto nunca exatamente em que era defeituosa a comparação da que se tinha servido, já que a reproduziu também nos mesmos termos uma dezena de anos mais tarde[50]; mas, já que ao menos declara expressamente que sua intenção não foi apresentar as quantidades infinitesimais como determinadas, devemos concluir disso que, para ele, o sentido dessa comparação se reduz a isto: um grão de areia, ainda que não é infinitamente pequeno, pode não obstante, sem inconveniente apreciável, ser considerado como tal em relação à terra, e assim não há necessidade de considerar infinitamente pequenos «em rigor», que pode-se inclusive, se se quer, não considerar mais do que como ficções; mas, entenda-se como se queira, uma tal consideração não é por isso menos manifestamente imprópria para dar do cálculo infinitesimal outra idéia, certamente insuficiente aos olhos de Leibnitz mesmo, que a de um simples cálculo de aproximação.

---

[46] *Mémoire de M. G. G. Leibnitz touchant son sentiment sur le Calcul différentiel, en el Journal de Trevoux*, 1701.

[47] Carta a Varignon, 2 de febrero de 1702.

[48] As raízes imaginárias são as raízes dos números negativos; falaremos mais adiante da questão dos números negativos e das dificuldades lógicas às que dão ensejo.

[49] Carta a Varignon, 14 de abril de 1702.

[50] Memória já citada mais atrás, nas *Acta Eruditorum* de Leipzig, 1712.

CAPÍTULO VI

AS «FICÇÕES BEM FUNDADAS»

O pensamento que Leibnitz expressa da maneira mais constante, ainda que não o afirma sempre com a mesma força, e ainda que inclusive às vezes, mas excepcionalmente, parece não querer pronunciar-se categoricamente a esse respeito, é que, no fundo, as quantidades infinitas e infinitamente pequenas não são mais do que ficções; mas, agrega, são «ficções bem fundadas», e, com isso não entende simplesmente que são úteis para o cálculo[51], ou inclusive para fazer «encontrar verdades reais», ainda que lhe ocorre insistir igualmente sobre esta utilidade; senão que repete constantemente que essas ficções estão «fundadas na realidade», que têm «*fundamentun in re*», o que implica evidentemente algo mais do que um valor puramente utilitário; e, em definitivo, para ele, este valor mesmo deve explicar-se pelo fundamento que essas ficções têm na realidade. Em todo caso, para que o método seja seguro, estima que basta considerar, não quantidades infinitas e infinitamente pequenas no sentido rigoroso destas expressões, já que este sentido rigoroso não corresponde a realidades, senão quantidades tão grandes ou tão pequenas como se queira, ou como sejam necessárias para que o erro seja feito menor que qualquer quantidade dada; ainda seria necessário examinar se é certo que, como declara, este erro é nulo por si mesmo, isto é, se esta maneira de considerar o cálculo infinitesimal lhe dá um fundamento perfeitamente rigoroso, mas teremos que voltar mais tarde sobre esta questão. Seja o que seja deste último ponto, os enunciados onde figuram as quantidades infinitas e infinitamente pequenas entram para ele na categoria das asserções que, diz, não são mais do que «*toleranter verae*», ou o que se chamaria (em espanhol) «pasables»[52], e que têm necessidade de ser «retificadas» pela explicação que se dá delas, do mesmo modo que quando se consideram as quantidades negativas como «menores que zero», e que em muitos outros casos onde a linguagem dos geômetras implica «uma certa maneira de falar figurada e críptica»[53]; esta última palavra pareceria ser uma alusão ao sentido simbólico e profundo da geometria, mas isto é algo muito diferente do que Leibnitz tem em vista, e talvez não há nisso, como ocorre bastante freqüentemente nele, mais do que a recordação de algum dado esotérico mais ou menos mal compreendido.

Quanto ao sentido no que é necessário entender que as quantidades infinitesimais são «ficções bem fundadas», Leibnitz declara que «os infinitos e

---

[51] É nesta consideração da utilidade prática onde Carnot creu encontrar uma justificativa suficiente; é evidente que, de Leibnitz a ele, a tendência «pragmatista» da ciência moderna se tinha acentuado já enormemente.

[52] Pasable: toleráveis. Nota do tradutor.

[53] Memória já citada, nas *Acta Eruditorum* de Leipzig, 1712.

infinitamente pequenos estão tão fundados que tudo se faz na geometria, e inclusive na natureza, como se fossem perfeitas realidades»[54]; para ele, efetivamente, tudo o que existe na natureza implica de alguma maneira a consideração do infinito, ou ao menos do que ele crê poder chamar assim: «A perfeição da análise dos transcendentes ou da geometria onde entre a consideração de algum infinito, diz, seria sem dúvida a mais importante por causa da aplicação que se pode fazer dele nas operações da natureza, que faz entrar o infinito em tudo o que faz»[55]; mas talvez se deva só, é certo, a que não podemos ter delas idéias adequadas, e porque aí entram elementos que não percebemos distintamente. Se isso é assim, seria mister não tomar demasiado literalmente asserções como esta por exemplo: «Já que nosso método é propriamente essa parte da matemática geral que trata do infinito, é o que faz que se tenha uma grande necessidade dele ao aplicar as matemáticas à física, porque o caráter do Autor infinito entra ordinariamente nas operações da natureza»[56]. Mas, se inclusive Leibniz entende por isto somente que a complexidade das coisas naturais ultrapassa incomparavelmente os limites de nossa percepção distinta, por isso não é menos certo que as quantidades infinitas e infinitamente pequenas devem ter sua «*fundamentum in re*»; e este fundamento, que se encontra na natureza das coisas, ao menos segundo a maneira na que é concebido por ele, não é outra coisa que o que ele chama a «lei de continuidade», que teremos que examinar um pouco mais adiante, e que considera, com razão ou sem ela, como não sendo, em suma, mais do que um caso particular de uma certa «lei de justiça», que se vincula, a sua vez, à consideração da ordem e da harmonia, e que encontra igualmente sua aplicação toda vez que deve observar-se uma certa simetria, assim como ocorre, por exemplo, nas combinações e permutações.

Agora, se as quantidades infinitas e infinitamente pequenas não são mais do que ficções, e admitindo inclusive que estas estejam realmente «bem fundadas», pode-se perguntar isto: por que empregar tais expressões, que, inclusive se podem considerar-se como «*toleranter verae*», por isso não são menos incorretas? Nisso há algo que pressagia já, se poderia dizer, o «convencionalismo» da ciência atual, ainda que com a notável diferença de que este já não se preocupa de nenhuma maneira de saber se as ficções às que recorre estão fundadas ou não, ou, segundo outra expressão de Leibnitz, se podem ser interpretadas «*sano sensu*», e nem sequer se têm uma significação qualquer. Já que se pode prescindir dessas quantidades fictícias, e contentar-se com considerar em seu lugar quantidades que se podem fazer simplesmente tão grandes e tão pequenas como se queira, e que, por esta razão podem chamar-se indefinidamente grandes e indefinidamente pequenas, sem dúvida teria valido mais começar por aí, e evitar assim introduzir ficções que, qualquer que possa ser sua «*fundamentum in re*», não são em suma de nenhuma utilidade efetiva, não só para o cálculo, senão para o

---

[54] Carta já citada a Varignon, de 2 de fevereiro de 1702.

[55] Carta ao marquês de l'Hospital, 1693.

[56] *Considération sur la différence qu'il y a entre l'Analyse ordinaire et le nouveau Calcul des transcendantes, en el Journal des Sçavans*, 1694.

método infinitesimal mesmo. As expressões «indefinidamente grande» e «indefinidamente pequeno», ou, o que equivale ao mesmo, mas é talvez ainda mais precisa, de «indefinidamente crescente» e «indefinidamente decrescente», não só têm a vantagem de ser as únicas que são escrupulosamente exatas; têm também a de mostrar claramente que as quantidades às que se aplicam não podem ser mais do que quantidades variáveis e não determinadas. Como o disse com razão um matemático, «o infinitamente pequeno não é uma quantidade muito pequena, que tem um valor efetivo, suscetível de determinação; seu caráter é ser eminentemente variável e poder tomar um valor menor que todas aquelas que se quisessem precisar; estaria muito melhor nomeado como indefinidamente pequeno»[57].

O emprego destes termos teria evitado muitas dificuldades e muitas discussões, e não teria nada de surpreendente nisso, pois não se trata de uma simples questão de palavras, senão da substituição de uma idéia justa por uma idéia falsa, de uma realidade por uma ficção; não teria permitido, concretamente, tomar as quantidades infinitesimais por quantidades fixas e determinadas, já que a palavra «indefinido» implica sempre por si mesma uma idéia de «devir», como o dizíamos mais atrás, e portanto de mudança ou, quando se trata de quantidades, de variação; e, se Leibnitz se tivesse servido dela habitualmente, sem dúvida que não se teria deixado arrastar tão facilmente à enojosa comparação do grão de areia. Ademais, reduzir «*infinite parva ad indefinite parva*» teria sido em todo caso mais claro que lhes reduzir «*ad incomparabiliter parva*»; a precisão teria ganhado com isso, sem que a exatidão tivesse tido nada que perder, muito ao contrário. As quantidades infinitesimais são certamente «incomparáveis» às quantidades ordinárias, mas isso poderia entender-se mais de uma maneira, e efetivamente se entendeu bastante freqüentemente em outros sentidos que o que tivesse sido necessário; é melhor dizer do que são **«**inasignable**»**[58], segundo outra expressão de Leibnitz, já que este termo parece não poder entender-se rigorosamente mais do que de quantidades que são suscetíveis de virem a ser tão pequenas como se queira, isto é, menores que toda quantidade dada, e às que, portanto, não se pode «atribuir» nenhum valor determinado, por pequeno que seja, e esse é efetivamente o sentido dos «*indefinite parva*». Desafortunadamente, é quase impossível saber se, no pensamento de Leibnitz, «incomparável» e «inasignable» são verdadeira e completamente sinônimos; mas, em todo caso, é certo ao menos que uma quantidade propriamente «inasignable», em razão da possibilidade de decrescimento indefinido que implica, é por isso mesmo

---

[57] Ch. de Freycinet, *De l'Analyse infinitésimale*, pp. 21-22 — O autor agrega: «Mas tendo prevalecido a primeira denominação (a de infinitamente pequeno) na linguagem, cremos dever conservá-la». Esse é certamente um escrúpulo muito excessivo, já que o uso não pode bastar para justificar as incorreções e as impropriedades da linguagem, e, se ninguém se atrevesse nunca a elevar-se contra abusos deste gênero, um não poderia sequer buscar introduzir nos termos mais exatidão e precisão que a que implica seu emprego ordinário.

[58] Inasignable: "este termo parece não poder entender-se rigorosamente mais do que de quantidades que são suscetíveis de virem a ser tão pequenas como se queira, isto é, menores que toda quantidade dada, e às que, portanto, **não se pode «atribuir»** nenhum valor determinado, por pequeno que seja"(Leibnitz). Nota do tradutor.

«incomparável» com toda quantidade dada, e inclusive, para estender esta idéia às diferentes ordens infinitesimais, com toda quantidade em relação à qual possa decrescer indefinidamente, enquanto essa mesma quantidade se considera como possuindo uma fixidez ao menos relativa.

Se há um ponto sobre o qual todo mundo pode em suma pôr-se de acordo facilmente, inclusive sem aprofundar mais as questões de princípios, é que a noção de indefinidamente pequeno, desde o ponto de vista puramente matemático ao menos, basta perfeitamente para a análise infinitesimal, e os «infinitistas» mesmos o reconhecem sem grande esforço[59]. Por conseguinte, a este respeito, pode-se ater a uma definição como a de Carnot: «¿Que é uma quantidade chamada infinitamente pequena em matemáticas? Nada mais que uma quantidade que se pode fazer tão pequena como se queira, sem que se esteja obrigado por isso a fazer variar aquelas cuja relação se busca»[60]. Mas, no que diz respeito à significação verdadeira das quantidades infinitesimais, toda a questão não se limita a isso: para o cálculo, importa pouco que os infinitamente pequenos não sejam mais do que ficções, já que um pode contentar com a consideração dos indefinidamente pequenos, que não propõe nenhuma dificuldade lógica; e, ademais, desde que, pelas razões metafísicas que temos exposto no começo, não podemos admitir um infinito quantitativo, já seja um infinito de magnitude ou de pequenez[61], nem nenhum infinito de uma ordem determinada e relativa qualquer, é muito certo que não podem ser efetivamente mais do que ficções e nada mais; mas, se estas ficções foram introduzidas, com razão ou sem ela, na origem do cálculo infinitesimal, é porque, na intenção de Leibnitz, deviam corresponder não obstante a algo, por defeituosa que seja a maneira em que o expressavam. Já que é dos princípios do que nos ocupamos aqui, e não de um procedimento de cálculo reduzido em certo modo a si mesmo, o que careceria de interesse para nós, devemos perguntar-nos pois, qual é justamente o valor dessas ficções, não só desde o ponto de vista lógico, senão também desde o ponto de vista ontológico, se estão tão «bem fundadas» como o cria Leibnitz, e se podemos dizer com ele que são «*toleranter verae*» e aceitá-las ao menos como tais, «*modo sano sensu intelligantur*»; para responder a estas questões, nos será necessário examinar mais de perto sua concepção da «lei de continuidade», já que é nesta onde Leibnitz pensava encontrar o «*fundamentum in re*» dos infinitamente pequenos.

---

[59] Ver concretamente L. Couturat, *De l'infini mathématique*, p. 265, nota: «Se pode constituir lógicamente o cálculo infinitesimal unicamente sobre a noção do indefinido…» — É certo que o emprego da palavra «logicamente» implica aqui uma reserva, já que, para o autor, opõe-se a «racionalmente», o que, ademais, é uma terminologia bastante estranha; a confissão não é menos interessante de reter por isso.

[60] *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, p. 7, nota; *ibid.*, p. 20 — O título desta obra está muito pouco justificado, já que, em realidade, não se encontra nela a menor idéia de ordem metafísica.

[61] A celebérrima concepção dos «dois infinitos» de Pascal é metafisicamente absurda, e nada mais é do que o resultado de uma confusão do infinito com o indefinido, onde se toma este nos dois sentidos opostos das magnitudes crescentes e decrescentes.

CAPÍTULO VII

OS «GRAUS DE INFINITUDE»

No que precede, ainda não tivemos a ocasião de ver todas as confusões que se introduzem inevitavelmente quando se admite a idéia do infinito em acepções diferentes de seu único sentido verdadeiro e propriamente metafísico; concretamente, se encontraria mais de um exemplo disso na longa discussão que teve Leibnitz com Jean Bernoulli sobre a realidade das quantidades infinitas e infinitamente pequenas, discussão que, ademais, não resultou em nenhuma conclusão definitiva, e que não podia fazê-lo, devido a essas confusões mesmas cometidas a cada instante tanto por um como por outro, e à falta de princípios de que procediam; ademais, em qualquer ordem de idéias que um se coloque, sempre é a falta de princípios o único que faz que as questões sejam insolúveis. Um pode surpreender-se, entre outras coisas, de que Leibnitz tenha feito uma diferença entre «infinito» e «interminado», e que assim não tenha rechaçado absolutamente a idéia, não obstante manifestamente contraditória, de um «infinito terminado», ainda que chega até perguntar-se «se é possível que exista por exemplo uma linha reta infinita, e não obstante terminada por uma parte e por outra»[62]. Sem dúvida, repugna-lhe admitir esta possibilidade, «tanto mais quanto que me pareceu, diz, que o infinito tomado rigorosamente deve ter sua fonte no interminado, sem o qual não vejo meio de encontrar um fundamento próprio para distinguir-lhe do finito»[63]. Mas, se se diz, de uma maneira mais afirmativa do que a sua, que «o infinito tem sua fonte no interminado», é porque ainda não se lhe considera como sendo-lhe absolutamente idêntico, porque se lhe distingue do interminado numa certa medida; e, enquanto isso é assim, corre-se o risco de encontrar-se detido por uma multidão de idéias estranhas e contraditórias. Estas idéias, é certo, Leibnitz declara que não as admitiria gostosamente, e que seria necessário que fora «forçado a isso com demonstrações indubitáveis»; mas já é bastante grave dar-lhes uma certa importância, e inclusive poder considerá-las de outro modo que como puras impossibilidades; no que concerne, por exemplo, à idéia de uma sorte de «eternidade terminada», que está entre as que enuncia a este propósito, não podemos ver nisso mais do que o produto de uma confusão entre a noção da eternidade e a da duração, que é absolutamente injustificável desde o ponto de vista da metafísica. Admitimos muito bem que o tempo em que transcorre nossa vida corpórea seja realmente indefinido, o que não exclui de nenhuma maneira que esteja «terminado por uma parte e por outra», isto é, que tenha ao mesmo tempo uma origem e um fim, conformemente à concepção cíclica tradicional; admitimos também que existem outros modos de duração, como o que os escolásticos chamavam *aevum*, cuja indefinidade é,

[62] Carta a Jean Bernoulli, 18 de novembro de 1698.

[63] Carta já citada a Varignon, 2 de fevereiro de 1702.

se se pode expressar assim, indefinidamente maior que a deste tempo; mas todos estes modos, em toda sua extensão possível, não são não obstante mais do que indefinidos, já que se trata sempre de condições particulares de existência, próprias a tal ou a qual estado, e nenhum deles, por causa que é uma duração, isto é, que implica uma sucessão, pode ser identificado ou assemelhável à eternidade, com a que não tem realmente mais relação que a que tem o finito, sob qualquer modo que seja, com o Infinito verdadeiro, já que a concepção de uma eternidade relativa não tem mais sentido do que a de um infinito relativo. Em tudo isto, não há lugar a considerar mais do que diversas ordens de indefinidade, assim como se verá melhor ainda a seguir; mas Leibnitz, a falta de ter feito as distinções necessárias e essenciais, e a falta sobretudo de ter proposto o único princípio que não lhe teria permitido extraviar-se nunca, encontra muitas dificuldades para refutar as opiniões de Bernoulli, que lhe crê inclusive, a tal ponto suas respostas são equívocas e vacilantes, menos afastado do que está, em realidade, de suas próprias idéias sobre a «infinitude dos mundos» e os diferentes «graus de infinitude».

Esta concepção dos pretendidos «graus de infinitude» equivale a supor, em suma, que podem existir mundos incomparavelmente maiores e menores que o nosso, nos que as partes correspondentes de cada um deles, guardam entre sim proporções equivalentes, de tal sorte que os habitantes de um qualquer destes mundos poderiam considerar-lhe como infinito com tanta razão como fazemos nós a respeito do nosso; mas, por nossa parte, diríamos mais corretamente com tão pouca razão. Uma maneira tal de considerar as coisas não teria *a priori* nada de absurdo sem a introdução da idéia do infinito, que certamente não tem nada que fazer aí: cada um desses mundos, por grande que se lhe suponha, por isso não está menos limitado, e então, como se lhes pode chamar infinito? A verdade é que nenhum deles pode sê-lo realmente, ainda que não seja mais porque são concebidos como múltiplos, já que aqui voltamos de novo à contradição de uma pluralidade de infinitos; e ademais, se ocorre a alguns e inclusive a muitos considerar nosso mundo como tal, por isso não é menos certo que esta asserção não pode oferecer nenhum sentido aceitável. Por outra parte, pode-se perguntar se são efetivamente mundos diferentes, ou se não são mais que, simplesmente, partes mais ou menos extensas de um mesmo mundo, já que, por hipótese, devem estar todos submetidos às mesmas condições de existência, e concretamente à condição espacial, que se desenvolve a uma escala simplesmente aumentada ou diminuída. É em um sentido muito diferente desse como se pode falar verdadeiramente, não da infinitude, senão da indefinidade dos mundos, e se pode falar assim porque, fora das condições de existência, tais como o espaço e o tempo, que são próprias a nosso mundo considerado em toda a extensão da que é suscetível, há uma indefinidade de outros mundos igualmente possíveis; um mundo, isto é, em suma um estado de existência, se definirá assim pelo conjunto das condições às que está submetido, mas, por isso mesmo de que estará sempre condicionado, isto é, determinado e limitado, e porque desde então não

compreenderá todas as possibilidades, não poderá ser considerado nunca como infinito, senão só como indefinido[64].

No fundo, a consideração dos «mundos», no sentido no que a entende Bernoulli, isto é, incomparavelmente maiores e menores uns em relação aos outros, não é extremamente diferente daquela à que Leibnitz recorreu quando considera «o firmamento em relação à terra, e a terra em relação a um grão de areia», e este em relação a «uma partícula de matéria magnética que passa através do vidro». Unicamente, Leibnitz não pretende falar aqui de «*gradus infinitatis*» no sentido próprio; pretende mostrar inclusive, ao contrário, que «aqui não se tem necessidade de tomar o infinito rigorosamente», e se contenta com considerar «incomparáveis», contra o qual não pode objetar-se nada logicamente. O defeito de sua comparação é de uma ordem muito diferente, e consiste, como já o dissemos, em que não podia dar mais do que uma idéia inexata, inclusive completamente falsa, das quantidades infinitesimais tais como se introduzem no cálculo. A seguir teremos a ocasião de substituir esta consideração pela dos verdadeiros graus múltiplos de indefinidade, tomada tanto na ordem crescente como na ordem decrescente; não insistiremos pois mais nisso no momento.

Em suma, a diferença entre Bernoulli e Leibnitz, é que, para o primeiro, trata-se verdadeiramente de «graus de infinitude», ainda que não os dá mais do que como uma conjectura provável, enquanto o segundo, que duvida de sua probabilidade e inclusive de sua possibilidade, limita-se a substituí-los pelo que se poderia chamar «graus de incomparabilidade». Aparte desta diferença, ademais certamente muito importante, a concepção de uma série de mundos semelhantes entre si, mas em escalas diferentes, é-lhes comum; esta concepção não deixa de ter uma certa relação, ao menos ocasional, com as descobertas devidas ao emprego do microscópio, na mesma época, e com algumas opiniões que estas descobertas sugeriram então, mas que não foram justificadas de nenhuma maneira pelas observações ulteriores, como a teoria da «correspondência dos embriões»: não é certo que, no embrião, o ser vivo está atual e corporalmente «pré-formado» em todas suas partes, e a organização de uma célula não tem nenhuma semelhança com a do conjunto do corpo do que ela é um elemento. No que diz respeito a Bernoulli ao menos, não parece duvidoso que, de fato, seja esse a origem de sua concepção; a este respeito, entre outras coisas muito significativas, diz efetivamente que as partículas de um corpo coexistem no todo «como, segundo Harvey e outros, mas não segundo Leuwenh, há em um animal inumeráveis óvulos, em cada óvulo um animálculo[65] ou variados, em cada animálculo também inumeráveis óvulos, e assim até o infinito»[66]. Quanto a Leibnitz, há verossimilmente nele algo muito diferente no ponto de partida: a saber, a idéia de que todos os astros que vemos poderiam não ser mais do que elementos do corpo de um ser incomparavelmente grande que nos recorda a concepção do «Grande Homem» da Cabala, porém singularmente materializado e

---

[64] Sobre este ponto ver *Los Estados múltiples del ser*.

[65] Animálculo: animal muito pequeno ou minúsculo. Aurélio digital. Nota do Tradutor.

[66] Carta de 23 de julho de 1698.

«espacializado», por uma sorte de ignorância do verdadeiro valor analógico do simbolismo tradicional; do mesmo modo, a idéia do «animal», isto é, do ser vivo, que subsiste corporalmente depois da morte, mas «reduzido a pequeno», está inspirada manifestamente na concepção do *Luz* ou «núcleo de imortalidade» segundo a tradição judaica[67], concepção que Leibnitz deforma igualmente ao pô-la em relação com a dos mundos incomparavelmente menores que o nosso, já que, diz, «nada impede que os animais ao morrer sejam transferidos a tais mundos; eu penso efetivamente que a morte não é nada mais que uma contração do animal, do mesmo modo que a geração não é nada mais que uma evolução»[68], tomando aqui esta última palavra simplesmente em seu sentido etimológico de «desenvolvimento». Tudo isso não é, no fundo, mais do que um exemplo do perigo que há em querer fazer concordar noções tradicionais com as opiniões da ciência profana, o que não pode fazer-se mais do que em detrimento das primeiras; estas eram certamente muito independentes das teorias suscitadas pelas observações microscópicas, e Leibnitz, ao relacionar e ao misturar umas com as outras, atuava já como deviam fazê-lo mais tarde os ocultistas, que se comprazem muito especialmente nesta maneira de aproximações injustificadas. Por outra parte, a superposição dos «incomparáveis» de ordens diferentes lhe parecia conforme a sua concepção do «melhor dos mundos», como proporcionando um meio de colocar nele, segundo a definição que dá dele, «tanto ser ou realidade como é possível»; e esta idéia do «melhor dos mundos» provém ainda, ela também, de outro dado tradicional mal aplicado, dado tomado à geometria simbólica dos Pitagóricos, bem como já o indicamos em outra parte[69]: a circunferência é, de todas as linhas de igual longitude, a que envolve a superfície máxima, e do mesmo modo a esfera é, de todos os corpos de igual superfície, o que contém o volume máximo, e essa é uma das razões pelas que estas figuras eram consideradas como as mais perfeitas; mas, se a este respeito há um máximo, não há um mínimo, isto é, que não existem figuras que encerrem uma superfície mínima ou um volume menor que todas as demais, e é por causa disso que Leibnitz foi conduzido a pensar que, se há um «melhor dos mundos», não há um «pior dos mundos», isto é, um mundo que contenha menos ser do que qualquer outro mundo possível. Ademais, sabe-se que é a esta concepção do «melhor dos mundos», ao mesmo tempo que à dos «incomparáveis», à que se referem suas comparações bem conhecidas do «jardim cheio de plantas» e do «tanque cheio de peixes», onde «cada ramo da planta, cada membro do animal, cada gota de seus humores é também um tal jardim ou um tal tanque»[70]; e isto nos conduz naturalmente a abordar outra questão conexa, que é a da «divisão da matéria ao infinito».

---

[67] Ver *El Rey del Mundo*, pp. 87-90, ed. francesa.

[68] Carta já citada a Jean Bernoulli, 18 de novembro de 1698.

[69] *El Simbolismo de la Cruz*, p. 58, ed. francesa. — Sobre a distinção dos «possíveis» e dos «compatíveis», da que depende a concepção do «melhor dos mundos», ver *Los Estados múltiples del Ser*, cap. II.

[70] *Monadologie*, 67; cf. *ibid.*, 74.

CAPÍTULO VIII

«DIVISÃO AO INFINITO» OU DIVISIBILIDADE INDEFINIDA

Para Leibnitz, a matéria não só é divisível, senão que está «subdividida efetivamente sem fim» em todas suas partes, «cada parte em partes, das que cada uma tem algum movimento próprio»[71]; e sobretudo é neste ponto de vista em que insiste para apoiar teoricamente a concepção que expusemos em último lugar: «Se segue da divisão efetiva que, numa parte da matéria, por pequena que seja, há como um mundo que consiste em criaturas inumeráveis»[72]. Bernoulli admite igualmente esta divisão efetiva da matéria «*in partes numero infinitas*», mas conclui disso conseqüências que Leibnitz não aceita: «Se um corpo finito, diz, tem partes infinitas em número, eu sempre cri e creio ainda que a menor dessas partes deve ter com o todo uma relação inasignable[73] ou infinitamente pequena»[74]; ao qual Leibnitz responde: «Inclusive se se concede que não há nenhuma porção da matéria que não esteja efetivamente dividida, não obstante não se chega a elementos indivisíveis, ou a partes menores que todas as demais, ou infinitamente pequenas, senão só a partes sempre menores, que são não obstante quantidades ordinárias, do mesmo modo que, ao aumentar, chega-se a quantidades sempre maiores»[75]. Por conseguinte, é a existência das «*minimae portiones*», ou dos «últimos elementos», o que Leibnitz contesta; ao contrário, para Bernoulli, parece claro que a divisão efetiva implica a existência simultânea de todos os elementos, do mesmo modo que, se se dá uma série «infinita», todos os termos que a constituem devem dar-se simultaneamente, o que implica a existência do «*terminus infinitesimus*». Mas, para Leibnitz, a existência deste termo não é menos contraditória que a de um «número infinito», e a noção do menor dos números, ou da «*fractio omnium infima*», não é menos do que a do maior dos números; o que ele considera como a «infinitude» de uma série se caracteriza pela impossibilidade de chegar a um último termo, e do mesmo modo, a matéria não estaria dividida «ao infinito» se esta divisão pudesse acabar-se alguma vez e desembocar em «últimos elementos»; e não é só que não possamos chegar de fato a esses últimos elementos, como o concede Bernoulli, senão que não devem existir na natureza. Não há elementos corporais indivisíveis, ou «átomos» no sentido próprio da palavra, como não há, na ordem numérica, fração indivisível e que não possa

[71] *Monadologie*, 65.

[72] Carta a Jean Bernoulli, 12-22 de julho de 1698.

[73] Inasignable: "este termo parece não poder entender-se rigorosamente mais do que de quantidades que são suscetíveis de virem a ser tão pequenas como se queira, isto é, menores que toda quantidade dada, e às que, portanto, **não se pode «atribuir»** nenhum valor determinado, por pequeno que seja"(Leibnitz). Nota do tradutor.

[74] Carta já citada de 23 de julho de 1698.

[75] Carta de 29 de julho de 1698.

dar nascimento a frações sempre menores, ou como não há, na ordem geométrica, elemento linear que não possa dividir-se em elementos menores.

No fundo, o sentido que Leibnitz toma, em tudo isto, a palavra «infinito» é exatamente aquele na qual fala, como vimos, de uma «multidão infinita»: para ele, dizer de uma série qualquer, assim como da sucessão dos números inteiros, que é infinita, não quer dizer que deve desembocar em um «*terminus infinitesimus*» ou em um «número infinito», senão que, ao contrário, não deve ter um último termo, porque os termos que compreende são «*plus quam numero designari possint*», ou porque constituem uma multidão que ultrapassa todo número. Do mesmo modo, se se pode dizer que a matéria é divisível ao infinito, é porque uma qualquer de suas porções, por pequena que seja, envolve sempre uma tal multidão; em outros termos, a matéria não tem «*partes minimae*» ou elementos simples, já que é essencialmente um composto: «É certo que as substâncias simples, isto é, que não são seres por agregação, são verdadeiramente indivisíveis, mas são imateriais, e não são mais do que princípios de ação»[76]. É no sentido de uma multidão inumerável, que, ademais, é o mais habitual em Leibnitz, onde a idéia do suposto infinito pode aplicar-se à matéria, à extensão geométrica, e em geral ao contínuo, considerado sob a relação de sua composição; ademais, este sentido não é próprio exclusivamente ao «*infinitum continuum*», e se estende também ao «*infinitum discretum*», como vimos pelo exemplo da multidão de todos os números e pelo das «séries infinitas». É por isso que Leibnitz podia dizer que uma magnitude é infinita porque é «inesgotável», o que faz «que se possa tomar sempre uma magnitude tão pequena como se queira»; e «permanece certo, por exemplo, que 2 seja tanto como

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \text{etc.},$$

o que é uma série infinita, em que todas as frações cujos numeradores são 1 e cujos denominadores, em progressão geométrica, duplicam-se, estão compreendidos todos ao mesmo tempo, ainda que não se empreguem nela sempre mais do que números ordinários, e ainda que não se faça entrar nela nenhuma fração infinitamente pequena, ou cujo denominador seja um número infinito»[77]. Ademais, o que acaba de dizer-se permite compreender como Leibnitz, ainda que afirme que o infinito, no sentido em que ele o entende, não é um todo, não obstante pode aplicar esta idéia ao contínuo: um conjunto contínuo, como um corpo qualquer, constitui efetivamente um todo, e inclusive o que chamamos mais atrás um todo verdadeiro, logicamente anterior a suas partes e independente destas, mas, evidentemente, é sempre finito como tal; por conseguinte, não é sob a relação do todo como Leibnitz pode chamar-lhe infinito, senão só sob a relação das partes nas que está dirigido ou pode estar dividido, e enquanto a multidão dessas partes ultrapassa efetivamente todo número asignable: isso é o que se

[76] Carta a Varignon, 20 de junho de 1702.

[77] Carta já citada a Varignon, 2 de fevereiro de 1702.

poderia chamar uma concepção analítica do infinito, devido a que, efetivamente, nada mais é do que analiticamente como a multidão, da que se trata, é inesgotável, assim como o explicaremos mais adiante.

Se agora nos perguntamos o que vale a idéia da «divisão ao infinito», é necessário reconhecer que, como a da «multidão infinita», contém uma certa parte de verdade, ainda que a maneira na que se expressa esteja longe de estar ao abrigo de toda crítica: primeiramente, não há que dizer que, segundo tudo o que expusemos até aqui, não pode haver de maneira nenhuma uma divisão ao infinito, senão só uma divisão indefinida; por outra parte, é mister aplicar esta idéia, não à matéria em geral, o que não tem talvez nenhum sentido, senão só aos corpos, ou à matéria corporal se temos que falar aqui de «matéria» apesar da extrema obscuridade desta noção e dos múltiplos equívocos aos que dá ensejo[78]. Efetivamente, é à extensão, e não à matéria, em qualquer acepção que se a entenda, a quem pertence em propriedade a divisibilidade, e não se poderiam confundir aqui uma com a outra mais do que na condição de adotar a concepção cartesiana que faz consistir a natureza dos corpos essencial e unicamente na extensão, concepção que, ademais, Leibnitz não admitia tampouco; por conseguinte, se todo corpo é necessariamente divisível, é porque é extenso, e não porque é material. Agora bem, recordemo-lo ainda, já que a extensão é algo determinado, não pode ser infinita, e desde então, não pode implicar evidentemente nenhuma possibilidade que seja mais infinita do que é ela mesma; mas, como a divisibilidade é uma qualidade inerente à natureza da extensão, sua limitação não pode vir mais do que desta natureza mesma: enquanto há extensão, esta extensão é sempre divisível, e assim pode considerar-se a divisibilidade como realmente indefinida, e esta indefinidade mesma como condicionada pela extensão. Portanto, a extensão, como tal, não pode estar composta de elementos indivisíveis, já que esses elementos, para ser verdadeiramente indivisíveis, deveriam ser inextensos, e uma soma de elementos inextensos não pode constituir nunca uma extensão, como tampouco uma soma de zeros pode constituir nunca um número; é por isso que, assim como o explicamos em outra parte[79], os pontos não são elementos ou partes de uma linha, e os verdadeiros elementos lineares são sempre distâncias entre pontos, que são só suas extremidades. Ademais, é assim como Leibnitz mesmo considerava as coisas a este respeito, e o que, segundo ele, constitui precisamente a diferença fundamental entre seu método infinitesimal e o «método dos indivisíveis» de Cavalieri, é que ele não considera uma linha como composta de pontos, nem uma superfície como composta de linhas, nem um volume como composto de superfícies: pontos, linhas e superfícies não são aqui mais do que limites ou extremidades, não elementos constitutivos. É evidente efetivamente que os pontos, multiplicados por qualquer quantidade que seja, não poderiam produzir nunca uma longitude, já que são rigorosamente nulos sob o aspecto da longitude; os verdadeiros elementos de uma magnitude devem ser sempre da mesma natureza que esta magnitude,

[78] Sobre este ponto, ver *El Reino de la Cantidad y los Signos de los Tiempos*.
[79] *El simbolismo de la Cruz*, cap. XVI.

ainda que incomparavelmente menores: é o que não tem vez com os «indivisíveis», e, por outra parte, é o que permite observar no cálculo infinitesimal uma certa lei de homogeneidade que supõe que as quantidades ordinárias e as quantidades infinitesimais, ainda que incomparáveis entre si, são, não obstante, magnitudes da mesma espécie.

Desde este ponto de vista, pode-se dizer também que a parte, qualquer que seja, deve conservar sempre uma certa «homogeneidade» ou conformidade de natureza com o todo, ao menos enquanto se considere que este todo possa ser reconstituído por meio de suas partes por um procedimento comparável ao que serve à formação de uma soma aritmética. Ademais, isto não quer dizer que não tenha nada simples na realidade, já que o composto pode estar formado, a partir dos elementos, de uma maneira completamente diferente dessa; mas então, a dizer verdade, esses elementos já não são propriamente «partes», e, assim como o reconhecia Leibnitz, não podem ser de nenhuma maneira de ordem corporal. O que é certo, efetivamente, é que não se pode chegar a elementos simples, isto é, indivisíveis, sem sair desta condição especial que é a extensão, de sorte que esta não pode resolver-se em tais elementos sem cessar de ser enquanto extensão. Disso resulta imediatamente que não podem existir elementos corporais indivisíveis, e que esta noção implica contradição; efetivamente, semelhantes elementos deveriam ser inextensos, e então já não seriam corporais, já que, por definição mesma, quem diz corporal diz forçosamente extenso, ainda que, ademais, esse não seja toda a natureza dos corpos; e assim, apesar de todas as reservas que devemos fazer sob outros aspectos, Leibnitz tem inteiramente razão ao menos contra o atomismo.

Mas, até aqui, não falamos mais do que de divisibilidade, isto é, de possibilidade de divisão; ¿seria necessário ir mais longe e admitir com Leibnitz uma «divisão efetiva»? Esta idéia também não está isenta de contradição, já que equivale a supor um indefinido inteiramente realizado, e, por isso, é contrária à natureza mesma do indefinido, que é ser sempre, como já dissemos, uma possibilidade em via de desenvolvimento, e, portanto, implicar essencialmente algo de inacabado, ainda não completamente realizado. Ademais, não há verdadeiramente nenhuma razão para fazer uma tal suposição, já que, quando estamos em presença de um conjunto contínuo, é o todo o que se nos dá, mas não nos é dado as partes nas quais pode ser dividido, e então só concebemos que nos é possível dividir esse todo em partes que poderão fazer-se cada vez menores, para virem a ser menores do que qualquer magnitude dada, sempre que a divisão se vá suficientemente longe; por conseguinte, de fato somos nós quem realizaremos as partes à medida que efetuamos essa divisão. Assim, o que nos dispensa de supor a «divisão efetiva», é a distinção que estabelecemos precedentemente a respeito das diferentes maneiras nas quais pode-se considerar um todo: um conjunto contínuo não é o resultado das partes nas quais é divisível, senão que, ao contrário, é independente delas, e portanto, o fato de que nos é dado como todo não implica de nenhuma maneira a existência efetiva dessas partes.

Do mesmo modo, desde outro ponto de vista, e passando à consideração do descontínuo, podemos dizer que, se se nos dá uma série numérica indefinida, isso não implica de nenhuma maneira que se nos dêem distintamente todos os termos que

compreende, o que é uma impossibilidade por isso mesmo de que é indefinida; na realidade, dar uma tal série, é simplesmente dar a lei que permite calcular o termo que ocupa na série uma posição determinada qualquer que seja[80]. Se Leibnitz tivesse dado esta resposta a Bernoulli, sua discussão sobre a existência do «*terminus infinitesimus*» teria acabado imediatamente por isso mesmo; mas não teria podido responder assim sem ser levado logicamente a renunciar a sua idéia da «divisão efetiva», a menos de negar toda correlação entre o modo contínuo da quantidade e seu modo descontínuo.

Seja como seja, no que diz respeito ao descontínuo ao menos, é precisamente na «indistinção» das partes onde podemos ver a raiz da idéia de infinito tal como a compreende Leibnitz, já que, como o dissemos mais atrás, esta idéia implica sempre para ele uma certa parte de confusão; mas esta «indistinção», longe de supor uma divisão realizada, tenderia ao contrário a excluí-la, inclusive à falta das razões completamente decisivas que indicamos faz um momento. Por conseguinte, se a teoria de Leibnitz é justa enquanto se opõe ao atomismo, por outra parte, para que se corresponda à verdade, é necessário retificá-la substituindo a «divisão da matéria ao infinito» pela «divisibilidade indefinida da extensão»; em sua expressão mais breve e mais precisa, esse é o resultado no que desembocam em definitivo todas as considerações que acabamos de expor.

[80] Cf. L. Couturat, *De l'infini mathématique*, p. 467: «A sucessão natural dos números se dá toda inteira por sua lei de formação, assim como, ademais, todas as demais sucessões e séries infinitas, às que uma fórmula de recorrência basta, em geral, para definir inteiramente, de tal sorte que seu limite ou sua soma (quando existe) encontra-se por isso completamente determinado… É graças à lei de formação da sucessão natural pelo que nós temos a idéia de todos os números inteiros, e neste sentido se dão todos juntos nessa lei». — Pode-se dizer efetivamente que a fórmula geral que expressa o termo n^e de uma série contém potencial e implicitamente, mas não efetiva e distintamente, todos os termos desta série, já que se pode sacar dela um qualquer dentre eles dando a *n* o valor correspondente à posição que este termo deve ocupar na série; mas, contrariamente ao que pensava L. Couturat, isso não é certamente o que queria dizer Leibnitz «quando sustentava a infinitude efetiva da sucessão natural dos números».

CAPÍTULO IX

INDEFINIDAMENTE CRESCENTE
E
INDEFINIDAMENTE DECRESCENTE

Antes de continuar o exame das questões que se referem propriamente ao contínuo, devemos voltar de novo sobre o que se disse mais atrás da inexistência de uma «fractio omnium infima», o que nos permitirá ver como a correlação ou a simetria que existe sob certos aspectos entre as quantidades indefinidamente crescentes e as quantidades indefinidamente decrescentes é suscetível de ser representada numericamente. Temos visto que, no domínio da quantidade descontínua, enquanto não se tenha que considerar mais do que a sucessão dos números inteiros, estes devem ser olhados como crescendo indefinidamente a partir da unidade, mas, já que a unidade é essencialmente indivisível, evidentemente não pode estabelecer um decrescimento indefinido; se se tomassem os números no sentido decrescente, um encontrar-se-ia detido necessariamente na unidade mesma, de sorte que a representação do indefinido pelos números inteiros está limitada a um só sentido, que é o do indefinidamente crescente. Pelo contrário, quando se trata da quantidade contínua, podem-se considerar quantidades tanto indefinidamente decrescentes como indefinidamente crescentes; e a mesma coisa se produz na quantidade descontínua mesma tão logo, para manifestar-se esta possibilidade, introduz-se nela a consideração dos números fracionários. Efetivamente, pode-se considerar uma sucessão de frações que decrescem indefinidamente, isto é, que por pequena que seja uma fração, sempre se pode formar uma menor que ela, e este decrescimento não pode desembocar nunca numa «fractio minima», como tampouco o crescimento dos números inteiros pode desembocar nunca em um «numerus maximus».

Para fazer evidente, pela representação numérica, a correlação do indefinidamente crescente e do indefinidamente decrescente, basta considerar, ao mesmo tempo que a sucessão dos números inteiros, a de seus números inversos: diz-se que um número é inverso de outro quando seu produto por este é igual à unidade, e por esta razão, o inverso do número n se representa pela notação

$$\frac{1}{n}.$$

Enquanto a sucessão dos números inteiros vai crescendo indefinidamente a partir da unidade, a sucessão de seus inversos vai decrescendo continuamente a partir dessa mesma unidade, que é ela mesma seu próprio inverso, e que é assim o ponto de partida comum das duas séries; a cada número de uma das séries lhe corresponde um número da outra e inversamente, de sorte que estas duas séries são igualmente

indefinidas, e que o são exatamente da mesma maneira, ainda que em sentido contrário. O inverso de um número é evidentemente tanto menor quanto maior é esse número, já que seu produto permanece sempre constante; por grande que seja um número

$$N,$$

o número

$$N + 1$$

será ainda maior, em virtude da lei mesma de formação da série indefinida dos números inteiros; e do mesmo modo, por pequeno que seja um número

$$\frac{1}{N},$$

o número

$$\frac{1}{N+1}$$

será ainda menor; é o que prova concretamente a impossibilidade do «menor dos números», cuja noção não é menos contraditória do que a do «maior dos números», já que, se não é possível deter-se em um número determinado no sentido crescente, não o será tampouco deter-se no sentido decrescente. Por outra parte, como esta correlação que se observa no contínuo numérico se apresenta primeiro como uma conseqüência da aplicação deste descontínuo ao contínuo, assim como o dissemos quando falamos dos números fracionários, cuja introdução supõe naturalmente, não pode mais do que traduzir a sua maneira, condicionada necessariamente pela natureza do número, a correlação que existe, no contínuo mesmo, entre o indefinidamente crescente e o indefinidamente decrescente. Por conseguinte, quando se consideram as quantidades contínuas como susceptíveis de virem a ser tão grandes e tão pequenas como se queira, isto é, maiores e menores que toda quantidade determinada, há oportunidade para observar sempre a simetria, e, se poderia dizer, em certo modo o paralelismo que oferecem entre si estas duas variações inversas; esta precisão nos ajudará a compreender melhor, a seguir, a possibilidade das diferentes ordens de quantidades infinitesimais.

É bom precisar que, ainda que o símbolo

$$\frac{1}{n}$$

evoque a idéia dos números fracionários, e ainda que de fato tire incontestavelmente sua origem deles, não é necessário que os inversos dos números inteiros sejam definidos aqui como tais, e isto com o fim de evitar o inconveniente que apresenta a noção ordinária dos números fracionários desde o ponto de vista propriamente aritmético, isto é, a concepção das frações como «partes da unidade». Efetivamente, basta considerar as duas séries como constituídas por números respectivamente maiores e menores que a unidade, isto é, como duas ordens de magnitudes que têm nesta seu comum limite, ao mesmo tempo que podem ser consideradas uma e outra como saídas igualmente desta unidade, que é verdadeiramente a fonte primeira de todos os números; ademais, se se quisessem considerar estes dois conjuntos indefinidos como formando uma sucessão única, se poderia dizer que a unidade ocupa exatamente o meio nesta sucessão dos

números, já que, como o vimos, há exatamente tantos números em um destes conjuntos como no outro. Por outra parte, se, para generalizar mais, se quisesse introduzir os números fracionários propriamente ditos, em lugar de considerar só a série dos números inteiros e a de seus inversos, não teria mudado nada quanto à simetria das quantidades crescentes e das quantidades decrescentes: se teriam por um lado todos os números maiores que a unidade, e pelo outro todos os números menores que a unidade; aqui também, a todo número

$$\frac{a}{b} > 1,$$

lhe corresponderia no outro grupo um número

$$\frac{b}{a} < 1,$$

e reciprocamente, de tal maneira que

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1,$$

do mesmo modo que se tinha feito em um momento

$$n \times \frac{1}{n} = 1,$$

e assim sempre teria exatamente os mesmos números em um e outro destes dois grupos indefinidos separados pela unidade; ademais, deve entender-se bem que, quando nós dizemos «os mesmos números», isso significa que há duas multidões que se correspondem termo a termo, mas sem que essas multidões mesmas possam considerar-se de nenhuma maneira por isso como «numeráveis». Em todos os casos, o conjunto de dois números inversos, ao multiplicar-se um pelo outro, reproduz sempre a unidade da que saíram; se pode dizer também que a unidade, ao ocupar o meio entre os dois grupos, e ao ser o único número que pode considerar-se como pertencendo ao mesmo tempo a um e a outro[81], de sorte que, em realidade, seria mais exato dizer bem mais sobre que os une do que os separa, corresponde ao estado de equilíbrio perfeito, e que contém em si mesma todos os números, que saíram dela por pares de números inversos ou complementares, constituindo cada um destes pares, pelo fato mesmo deste complementarismo, uma unidade relativa em sua indivisível dualidade[82]; mas voltaremos um pouco mais adiante sobre esta última consideração e sobre as conseqüências que implica.

Em lugar de dizer que a série dos números inteiros é indefinidamente crescente e a de seus inversos indefinidamente decrescente, se poderia dizer também, no mesmo

---

[81] Segundo a definição dos números inversos, a unidade se apresenta por um lado sob a forma 1 e por outro sob a forma $\frac{1}{1}$, de tal sorte que $1 \times \frac{1}{1} = 1$; mas, como por outra parte $\frac{1}{1} = 1$, é a mesma unidade a que se representa sob duas formas diferentes, e a que, portanto, como o dizíamos mais atrás, é ela mesma seu próprio inverso.

[82] Dizemos indivisível porque, desde que existe um dos dois números que formam tal parelha, o outro existe também necessariamente por isso mesmo.

sentido, que os números tendem assim, por uma parte, para o indefinidamente grande, e, pela outra, para o indefinidamente pequeno, na condição de entender por isto os limites mesmos do domínio no qual se consideram estes números, já que uma quantidade variável não pode tender mais do que para um limite. Em suma, o domínio do que se trata é o da quantidade numérica considerada em toda a extensão da que é suscetível[83]; isto equivale a dizer também que seus limites não estão determinados por tal ou qual número particular, por grande ou por pequeno que se lhe suponha, senão pela natureza mesma do número como tal. É por isso mesmo que o número, como qualquer outra coisa de natureza determinada, exclui tudo o que não é ele, pelo que aqui não pode tratar-se de nenhuma maneira de infinito; ademais, acabamos de dizer que o indefinidamente grande deve conceber-se forçosamente como um limite, ainda que não seja de nenhuma maneira um «*terminus ultimus*» da série dos números, e se pode destacar a este propósito que a expressão «tender ao infinito», empregada freqüentemente pelos matemáticos no sentido de «crescer indefinidamente», é também uma absurdidade, já que o infinito implica evidentemente a ausência de todo limite, e já que, portanto, não teria nada nele para o que seja possível tender. O que é bastante singular também, é que alguns, ainda que reconheçam a incorreção e o caráter abusivo desta expressão «tender ao infinito», não sentem, por outra parte, nenhum escrúpulo em tomar a expressão «tender para zero» no sentido de «decrescer indefinidamente»; no entanto, zero, ou a «quantidade nula», é exatamente simétrico, em relação às quantidades decrescentes, do que é a pretendida «quantidade infinita» em relação às quantidades crescentes; mas teremos que voltar depois sobre as questões que se propõem mais particularmente sobre o tema do zero e de suas diferentes significações.

Posto que a sucessão dos números, em seu conjunto, não está «terminada» por um certo número, resulta disso que não há número, por grande que seja, que possa ser identificado ao indefinidamente grande no sentido no qual acabamos de entendê-lo; e, naturalmente, a mesma coisa é igualmente verdade no que diz respeito ao indefinidamente pequeno. Só se pode considerar um número como praticamente indefinido, se é permissível expressar-se assim, quando já não pode ser expressado pela linguagem nem representado pela escrita, o que, de fato, ocorre inevitavelmente em um momento dado quando se consideram números que vão sempre crescendo ou decrescendo; isso, se se quer, é uma simples questão de «perspectiva», mas isso mesmo concorda em suma com o caráter do indefinido, enquanto este não é outra coisa, em definitivo, que aquilo cujos limites não podem ser suprimidos, já que isso seria contrário à natureza mesma das coisas, senão simplesmente afastados até chegar a ser inteiramente perdidos de vista. A este propósito, teria lugar a propor-se algumas questões bastante curiosas: assim, poder-se-ia perguntar por que a língua chinesa

---

[83] Não há que dizer que os números incomensuráveis, sob a relação da magnitude, intercalam-se necessariamente entre os números ordinários, inteiros ou fracionários segundo sejam maiores ou menores que a unidade; é o que mostra, ademais, a correspondência geométrica que indicamos precedentemente, e também a possibilidade de definir um tal número por dois conjuntos convergentes de números comensuráveis dos que é o limite comum.

representa simbolicamente o indefinido pelo número dez mil; a expressão «os dez mil seres», por exemplo, significa todos os seres, que são realmente em multidão indefinida ou «inumerável». O que é muito destacável, é que a mesma coisa precisamente se produz também em grego, onde uma só palavra, com uma simples diferença de acentuação que não é evidentemente mais do que um detalhe completamente acessório, e que não se deve sem dúvida mais do que à necessidade de distinguir no uso as duas significações, serve igualmente para expressar ao mesmo tempo uma e outra destas duas idéias: *μùrioi*, dez mil; *μurίoi*, uma indefinidade. A verdadeira razão deste fato é esta: este número dez mil é a quarta potência de dez; agora bem, segundo a fórmula do *Tao-te-King*, «um produziu dois, dois produziu três, três produziu todos os números», o que implica que quatro, produzido imediatamente por três, equivale de uma certa maneira a todo o conjunto dos números, e isso porque, desde que se tem o quaternário, tem-se também, pela adição dos quatro primeiros números, o denário, que representa um ciclo numérico completo:

$$1+2+3+4=10,$$

o que é, como o dissemos já em outras ocasiões, a fórmula numérica da *Tétraktys* pitagórica. Pode-se acrescentar também que esta representação da indefinidade numérica tem sua correspondência na ordem espacial: sabe-se que a elevação a uma potência superior de um grau representa, nessa ordem, a agregação de uma dimensão; agora bem, já que nossa extensão não tem mais do que três dimensões, seus limites são ultrapassados quando se vai além da terceira potência, o que, em outros termos, equivale a dizer que a elevação à quarta potência marca o termo mesmo de sua indefinidade, já que, desde que se efetua, saiu-se por isso mesmo desta extensão e passado a outra ordem de possibilidades.

CAPÍTULO X

INFINITO E CONTÍNUO

A idéia do infinito tal como a entende habitualmente Leibnitz, e que é única, é necessário não a perder de vista nunca, a de uma multidão que ultrapassa todo número, apresenta-se às vezes sob o aspecto de um «infinito descontínuo», como o caso das séries numéricas chamadas infinitas; mas seu aspecto mais habitual, e também o mais importante no que diz respeito à significação do cálculo infinitesimal, é o do «infinito contínuo». Convém recordar a este propósito que, quando Leibnitz, ao começar as investigações que, ao menos segundo o que diz ele mesmo, deviam conduzir à descoberta de seu método, operava sobre séries de números, não tinha que considerar mais do que diferenças finitas no sentido ordinário desta palavra; as diferenças infinitesimais não se apresentaram a ele mais do que quando se trata de aplicar o descontínuo numérico ao contínuo espacial. Por conseguinte, a introdução dos diferenciais se justificava pela observação de uma certa analogia entre as variações respectivas destes dois modos da quantidade; mas seu caráter infinitesimal provinha da continuidade das magnitudes às quais as mesmas deviam aplicar-se, e assim a consideração dos «infinitamente pequenos» se encontrava, para Leibnitz, estreitamente ligada à questão da «composição do contínuo».

Os «infinitamente pequenos» tomados «em rigor» seriam, como pensava Bernoulli, «*partes minimae*» do contínuo; mas precisamente o contínuo, enquanto existe como tal, é sempre divisível, e portanto, não poderia ter «*partes minimae*». Os «indivisíveis» não são sequer partes daquilo em relação ao qual são indivisíveis, e o «mínimo» não pode conceber-se aqui mais do que como o limite ou extremidade, não como elemento: «A linha não é só menor que qualquer superfície, diz Leibnitz, senão que nem sequer é uma parte da superfície, senão só um mínimo ou uma extremidade»[84]; e a assimilação entre *extremum* e *minimum* pode justificar-se aqui, sob seu ponto de vista, pela «lei da continuidade», enquanto esta permite, segundo ele, o «passo ao limite», assim como o veremos mais adiante. Ocorre o mesmo, como já o dissemos, com o ponto em relação à linha, e também, por outra parte, com a superfície em relação ao volume; mas, pelo contrário, os elementos infinitesimais devem ser partes do contínuo, sem o qual nem sequer seriam quantidades; e não podem sê-lo mais do que na condição de não serem «infinitamente pequenos» verdadeiros, já que estes não seriam outra coisa que essas «*partes minimae*» ou esses «últimos elementos» cuja existência mesma, a respeito do contínuo, implica contradição. Assim, a composição do contínuo não permite que os infinitamente pequenos sejam outra coisa que simples ficções; mas,

---

[84] *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica Mathesi ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas*, en las *Acta Eruditorum* de Leipzig, 1686.

não obstante, por outro lado, é a existência mesma do contínuo que faz que sejam, ao menos aos olhos de Leibnitz, «ficções bem fundadas»: se «tudo se faz na geometria como se fossem perfeitas realidades», é porque a extensão, que é o objeto da geometria, é contínua; e, se ocorre o mesmo na natureza, é porque os corpos são igualmente contínuos, e porque também há continuidade em todos os fenômenos tais como o movimento, cuja sede são estes corpos, e que são o objeto da mecânica e da física. Ademais, se os corpos são contínuos, é porque são extensos, e porque participam da natureza da extensão; e, do mesmo modo, a continuidade do movimento e dos diversos fenômenos que podem referir-se a ele mais ou menos diretamente provém essencialmente de seu caráter espacial. Por conseguinte, em suma, é a continuidade da extensão a que é o verdadeiro fundamento de todas as demais continuidades que se observam na natureza corporal; e, ademais, é por isso pelo que, ao introduzir a este respeito uma distinção essencial que Leibnitz não havia feito, nós precisamos que não é à «matéria» como tal, senão mais corretamente à extensão, à que deve atribuir-se em realidade a propriedade de «divisibilidade indefinida».

Não vamos examinar aqui a questão das demais formas possíveis da continuidade, independentes de sua forma espacial; efetivamente, é sempre a esta à que é necessário voltar quando se consideram magnitudes, e assim sua consideração basta para tudo o que se refere às quantidades infinitesimais. Não obstante, devemos agregar a isso a continuidade do tempo, já que, contrariamente à estranha opinião de Descartes sobre este tema, o tempo é realmente contínuo em si mesmo, e não só na representação espacial pelo movimento que serve para sua medida[85]. A este respeito, se poderia dizer que o movimento é em certo modo duplamente contínuo, já que o é ao mesmo tempo por sua condição espacial e por sua condição temporária; e esta sorte de combinação do tempo e do espaço, de onde resulta o movimento, não seria possível se um fora descontínuo enquanto o outro é contínuo. Esta consideração permite ademais introduzir a continuidade em algumas categorias de fenômenos naturais que se referem mais diretamente ao tempo que ao espaço, ainda que se verifiquem em um e noutro igualmente, como, por exemplo, o processo de um desenvolvimento orgânico qualquer. Ademais, para a composição do contínuo temporal, se poderia repetir tudo o que dissemos para a composição do contínuo espacial, e, em virtude dessa sorte de simetria que existe sob algumas relações, como o explicamos em outra parte, entre o espaço e o tempo, se chegaria à umas conclusões estritamente análogas: os instantes, concebidos como indivisíveis, já não são partes da duração como os pontos não são partes da extensão, assim como o reconhecia igualmente Leibnitz, e, ademais, isso era também uma tese completamente corrente nos escolásticos; em suma, é um caráter geral de todo contínuo o fato de que sua natureza não implica a existência de «últimos elementos».

Tudo o que dissemos até aqui mostra suficientemente em que sentido pode-se compreender que, desde o ponto de vista em que se coloca Leibnitz, o contínuo envolve necessariamente o infinito; mas, bem entendido, nós não poderíamos admitir que se

---

[85] Cf. *El Reino de la Cantidad y los Signos de los Tiempos*, cap. V.

tratasse nisso de uma «infinitude efetiva», como se todas as partes possíveis devessem dar-se efetivamente quando se dá o todo, nem, ademais, de uma verdadeira infinitude, que é excluída por toda determinação, qualquer que seja, e que, portanto, não pode estar implicada pela consideração de nenhuma coisa particular. Unicamente, aqui como em todos os casos onde se apresenta a idéia de um pretendido infinito, diferente do verdadeiro Infinito metafísico, e que, não obstante, em si mesmos, não representam mais do que absurdidades puras e simples, toda contradição desaparece, e com ela toda dificuldade lógica, se se substitui esse suposto infinito pelo indefinido, e se se diz simplesmente que todo contínuo envolve uma certa indefinidade quando se lhe considera sob a relação de seus elementos. É também pelo que alguns, à falta de fazer esta distinção fundamental do Infinito e do indefinido, creram equivocadamente que não era possível escapar à contradição de um infinito determinado mais do que rechaçando absolutamente o contínuo e substituindo-lhe pelo descontínuo; é assim, concretamente, como Renouvier, que nega com razão o infinito matemático, mas a quem a idéia do Infinito metafísico é completamente estranha, creu-se obrigado, pela lógica de seu «finitismo», a chegar até admitir o atomismo, caindo assim em outra concepção que, como o vimos precedentemente, não é menos contraditória que a que queria eliminar.

CAPÍTULO XI

A «LEI DE CONTINUIDADE»

Desde que existe o contínuo, podemos dizer com Leibnitz que há continuidade na natureza, ou, se se quer, que deve ter nela uma certa «lei de continuidade» que se aplica a tudo o que apresenta os caracteres do contínuo; isso é em suma evidente, mas disso não resulta de modo algum que uma tal lei deva ser aplicável a tudo como ele o pretende, já que, se há contínuo, há também descontínuo, e isso, inclusive no domínio da quantidade[86]: o número, efetivamente, é essencialmente descontínuo, e é inclusive esta quantidade descontínua, e não a quantidade contínua, a que é realmente, como o dissemos em outra parte, o modo primeiro e fundamental da quantidade, ou o que se poderia chamar propriamente a quantidade pura[87]. Por outra parte, nada permite supor, *a priori*, que, fora da quantidade, não possa considerar-se por todas partes uma continuidade qualquer, e inclusive, a dizer verdade, seria muito surpreendente que só o número, entre todas as coisas possíveis, tivesse a propriedade de ser essencialmente descontínuo; mas nossa intenção não é procurar aqui em que limites é verdadeiramente aplicável uma «lei de continuidade», e que restrições conviria contribuir-lhe para tudo o que ultrapassa o domínio da quantidade entendida em seu sentido mais geral. No que diz respeito aos fenômenos naturais, nos limitaremos a dar um exemplo muito simples de descontinuidade: se é necessário uma certa força para romper uma corda, e se se aplica a essa corda uma força cuja intensidade seja menor que essa, não se obterá uma ruptura parcial, isto é, de uma parte dos fios que compõem a corda, senão só uma tensão, o que é completamente diferente; se se aumenta a força de uma maneira contínua, a tensão crescerá primeiramente também de uma maneira contínua, mas chegará um momento em que se produzirá a ruptura, e então, de uma maneira súbita e em certo modo instantânea, se terá um efeito de uma natureza completamente diferente do precedente, o que implica manifestamente uma descontinuidade; e assim não é verdadeiro dizer, em termos inteiramente gerais e sem restrições de nenhum tipo, que «*natura non facit saltus*».

Seja como seja, basta em todo caso que as magnitudes geométricas sejam contínuas, como o são efetivamente, para que sempre se possam tomar delas elementos

---

[86] Cf. L. Couturat, *De l'infini mathématique*, p. 140: «Em geral, o princípio de continuidade não tem lugar na álgebra, e não pode ser invocado para justificar a generalização algébrica do número. A continuidade não só não é em modo algum necessária para as especulações da aritmética geral, senão que repugna ao espírito desta ciência e à natureza mesma do número. O número, efetivamente, é essencialmente descontínuo, assim como quase todas suas propriedades aritméticas… Portanto, não se pode impor a continuidade às funções algébricas, por complicadas que sejam, já que o número inteiro, que proporciona todos seus elementos, é descontínuo, e "salta" em certo modo de um valor a outro sem transição possível».

[87] Ver *El Reino de la Cantidad y los Signos de los Tiempos*, cap. II.

tão pequenos como se queira, e, portanto, que podem virem a ser menores que toda magnitude asignable; e como o diz Leibnitz, «é sem dúvida nisso no que consiste a demonstração rigorosa do cálculo infinitesimal», que se aplica precisamente a estas magnitudes geométricas. Por conseguinte, a «lei de continuidade» pode ser o «*fundamentun in re*» dessas ficções que são as quantidades infinitesimais, bem como também dessas outras ficções que são as raízes imaginárias, já que Leibnitz faz uma aproximação entre umas e outras sob esta relação, sem que por isso seja necessário ver aí, como talvez o tivesse querido ele, «a pedra de toque de toda verdade»[88]. Por outra parte, se se admite uma «lei de continuidade», ainda que se façam algumas restrições sobre seu alcance, e inclusive se se reconhece que esta lei pode servir para justificar as bases do cálculo infinitesimal, «*modo sano sensu intelligantur*», daí não se segue de modo algum que se deva conceber exatamente como o fazia Leibnitz, nem aceitar todas as conseqüências que ele mesmo pretendia tirar dela; é esta concepção e suas conseqüências o que nos é necessário examinar agora um pouco mais de perto.

Sob sua forma mais geral, esta lei equivale em suma a isto, que Leibnitz enuncia em várias ocasiões em termos diferentes, mas cujo sentido é sempre o mesmo no fundo: desde que há uma certa ordem nos princípios, entendidos aqui em um sentido relativo como os dados que se tomam como ponto de partida, deve ter sempre uma ordem correspondente nas conseqüências que se tiram deles. Como já o indicamos, é então um caso particular da «lei de justiça», isto é, de ordem, que postula a «universal inteligibilidade»; por conseguinte, no fundo, para Leibnitz, é uma conseqüência ou uma aplicação do «princípio de razão suficiente», se não este princípio mesmo enquanto se aplica mais especialmente às combinações e às variações da quantidade: «A continuidade é uma coisa ideal», diz, o que, ademais, está longe de ser tão claro como se poderia desejar, mas «o real não deixa de governar-se pelo ideal e o abstrato, …porque tudo se governa por razão»[89]. Há certamente uma certa ordem nas coisas, e não é isso o que está em questão aqui, mas se pode conceber esta ordem muito diferentemente de como o fazia Leibnitz, cujas idéias a este respeito estavam influenciadas sempre mais ou menos diretamente por seu pretendido «princípio do melhor», que perde toda significação desde que se compreendeu a identidade metafísica do possível e do real[90]; ademais, ainda que foi um adversário declarado do estreito racionalismo cartesiano, quanto a sua concepção da «universal inteligibilidade», se lhe poderia reprovar ter confundido demasiado facilmente «inteligível» e «racional»; mas não insistiremos mais sobre estas considerações de ordem geral, já que nos levariam muito longe de nosso tema. A este propósito, só acrescentaremos que é permissível surpreender-se de que, depois de haver afirmado que «não há necessidade de fazer depender a análise matemática das controvérsias metafísicas», o que, ademais, é completamente contestável, já que isso equivale a fazer da metafísica, segundo o ponto de vista

[88] L. Couturat, *De l'infini mathématique*, p. 266.
[89] Carta já citada a Varignon, 2 de fevereiro de 1702.
[90] Ver *Los Estados múltiples del ser*, cap. II.

puramente profano, uma ciência inteiramente ignorante de seus próprios princípios, e já que, ademais, só a incompreensão pode fazer nascer controvérsias no domínio metafísico, Leibnitz chegue finalmente a invocar, em apoio a sua «lei de causalidade», à que vincula esta mesma análise matemática, um argumento que, efetivamente, não é metafísico, senão teológico, e que poderia prestar-se ainda a muitas outras controvérsias: «É porque tudo se governa por razão, diz, e porque de outro modo não teria ciência nem regra, o que não seria conforme à natureza do soberano princípio»[91], ao qual se poderia responder que a razão não é em realidade mais do que uma faculdade puramente humana e de ordem individual, e que, sem que seja necessário sequer remontar até o «soberano princípio», a inteligência, entendida no sentido universal, isto é, o intelecto puro e transcendente, é algo completamente diferente da razão e não poderia ser-lhe assimilado de nenhuma maneira, de tal sorte que, se é certo que não há nele nada de «irracional», tampouco é menos certo que, não obstante, há nele muitas coisas que são «supra-racionais», mas que por isso não são menos «inteligíveis».

Passaremos agora a outro enunciado mais preciso da «lei de continuidade», enunciado que se refere mais diretamente do que o precedente aos princípios do cálculo infinitesimal: «Se um caso[92] se aproxima de uma maneira contínua a outro caso nos dados e se desvanece[93] finalmente nele, é mister necessariamente que os resultados destes casos se aproximem igualmente de uma maneira contínua nas soluções buscadas e que finalmente se terminem reciprocamente um no outro»[94]. Há aqui duas coisas que importa distinguir: primeiro, se a diferença de dois casos diminui até vir a ser menor que toda magnitude asignable «*in datis*», deve ser o mesmo «*in quaesitis*»; em suma, nisto não se trata mais do que a aplicação do enunciado mais geral, e não é esta parte da lei a que é suscetível de suscitar objeções, desde que se admite que existem variações contínuas e que é precisamente ao domínio onde se efetuam tais variações, isto é, ao domínio da geometria, ao que se refere propriamente o cálculo infinitesimal; ¿mas é necessário admitir ademais que «*casus in casum tandem evanescat*», e que, portanto, «*eventus casuum tandem in se invicem desinant*»? Em outros termos, ¿a diferença dos dois casos virá a ser, alguma vez, rigorosamente nula, em conseqüência de seu decrescimento contínuo e indefinido, ou bem, se se prefere, ainda que seja indefinido, chegará a alcançar alguma vez seu término este decrescimento? No fundo, trata-se de saber se, numa variação contínua, pode ser alcançado o limite; e sobre este ponto,

---

[91] Mesma carta a Varignon. — A primeira exposição da «lei de continuidade» tinha aparecido nas *Nouvelles de la République des Lettres*, em julho de 1687, sob este título bastante significativo desde o mesmo ponto de vista: *Principium quoddam generale non in Mathematicis tantum sed et Physicis utile, cujus ope ex consideratione Sapientiæ Divinæ examinantur Naturæ Leges, qua occasione nata cum R. P. Mallebranchio controversia explicatur, et quidam Cartesianorum errores notantur.*

[92]Veja a seguir: "Mas toda a questão é saber precisamente se a quantidade*(caso)* variável, que se aproxima indefinidamente a seu limite". N. do t.

[93] Desvanecer-se: anular-se. N. do t.

[94] *Specimen Dynamicum pro admirandis Naturæ Legibus circa corporum vires et mutuas actiones detegendis et ad suas causas revocandis*, Parte II.

faremos observar primeiro isto: como o indefinido, tal como está implicado no contínuo, implica sempre em um certo sentido algo de «inesgotável», e como Leibnitz não admite que a divisão do contínuo possa desembocar em um termo final, e nem sequer que este termo exista verdadeiramente, ¿é perfeitamente lógico e coerente por sua vez admitir ao mesmo tempo que uma variação contínua, que se efetua «*per infinitos gradus intermedios*»[95], possa atingir seu limite? Isto não quer dizer, certamente, que o limite não possa ser alcançado de nenhuma maneira, o que reduziria o cálculo infinitesimal a não poder ser nada mais que um simples método de aproximação; mas, se o limite se alcança efetivamente, não deve ser na variação contínua em si mesma, nem como último termo da série indefinida dos «*gradus mutationis*». Não obstante, é pela «lei de continuidade» como Leibnitz pretende justificar o «passo ao limite», que não é a menor das dificuldades às que seu método dá ensejo desde o ponto de vista lógico, e é precisamente por isso pelo que suas conclusões devem ser completamente inaceitáveis; mas, para que este lado da questão possa ser compreendido inteiramente, nos é necessário começar por precisar a noção matemática do limite mesmo.

[95] Carta a Schulenburg, 29 de marzo de 1698.

CAPÍTULO XII

A NOÇÃO DE LIMITE

A noção do limite é uma das mais importantes que teremos que examinar aqui, já que é dela de quem depende todo o valor do método infinitesimal sob o aspecto do rigor; inclusive se pôde chegar até dizer que, em definitivo, «todo o cálculo infinitesimal repousa unicamente sobre a noção de limite, já que é precisamente esta noção rigorosa a que serve para definir e para justificar todos os símbolos e todas as fórmulas do cálculo infinitesimal»[96]. Efetivamente, o objeto deste cálculo «se reduz a calcular limites de relações e limites de somas, isto é, a encontrar os valores fixos para os quais convergem relações ou somas de quantidades variáveis, à medida que estas decrescem indefinidamente segundo uma lei dada»[97]. Para mais precisão ainda, diremos que, dos dois ramos nos quais se divide o cálculo infinitesimal, o cálculo diferencial consiste em calcular os limites de relações cujos dois termos vão simultaneamente decrescendo indefinidamente segundo uma certa lei, de tal maneira que a relação mesma conserva sempre um valor finito e determinado; e o cálculo integral consiste em calcular os limites de somas de elementos cuja multidão cresce indefinidamente ao mesmo tempo que o valor de cada um deles decresce indefinidamente, já que é mister que estas duas condições estejam reunidas para que a soma mesma permaneça sempre uma quantidade finita e determinada. Dito isto, de uma maneira geral, pode-se dizer que o limite de uma quantidade variável é outra quantidade considerada como fixa, quantidade à que a quantidade variável se supõe que se aproxima, pelos valores que toma sucessivamente no curso de sua variação, até diferir dela tão pouco como se queira, ou, em outros termos, até que a diferença destas duas quantidades vier a ser menor que toda quantidade asignable. O ponto sobre o que devemos insistir muito particularmente, por razões que se compreenderão melhor depois, é que o limite se concebe essencialmente como uma quantidade fixa e determinada; ainda que não estivesse dada pelas condições do problema, se deverá começar sempre por supô-la um valor determinado, e continuar considerando-a como fixa até o fim do cálculo.

Mas uma coisa é a concepção do limite em si mesmo, e outra a justificativa lógica do «passo ao limite»; Leibnitz estimava que o que justifica em geral este «passo ao limite», é que a mesma relação que existe entre várias magnitudes variáveis subsiste entre seus limites fixos, quando suas variações são contínuas, já que então alcançam efetivamente seus limites respectivos; isso é outro enunciado do «princípio de

---

[96] L. Couturat, *De l'infini mathématique*, Introdução, p. XXIII.
[97] Ch. de Freycinet, *De l'Analyse infinitésimale*, Prefácio, p. VIII.

continuidade»[98]. Mas toda a questão é saber precisamente se a quantidade variável, que se aproxima indefinidamente a seu limite, e que, portanto, pode diferir dele tão pouco como se queira, segundo a definição mesma de limite, pode atingir efetivamente esse limite, por uma conseqüência de sua variação mesma, isto é, se o limite pode ser concebido como o último termo de uma variação contínua. Veremos que, em realidade, esta solução é inaceitável; pelo momento, diremos somente, sem prejuízo de voltar sobre isso um pouco mais adiante, que a verdadeira noção da continuidade não permite considerar as quantidades infinitesimais como podendo igualar-se nunca a zero, já que então deixariam de ser quantidades; agora bem, para Leibnitz mesmo, devem guardar sempre o caráter de verdadeiras quantidades, e isso inclusive quando se as considera como «evanescentes». Por conseguinte, uma diferença infinitesimal não poderá ser nunca rigorosamente nula; portanto, uma variável, enquanto se considere como tal, diferirá sempre realmente de seu limite, e não poderia alcançar-lhe sem perder por isso mesmo seu caráter de variável.

Sobre este ponto, podemos pois aceitar inteiramente, aparte uma ligeira reserva, as considerações que um matemático que já citamos expõe nestes termos: «O que caracteriza o limite tal como o definimos, é ao mesmo tempo que a variável possa aproximar-se dele tanto como se queira, e não obstante que não possa alcançar-lhe nunca rigorosamente; já que, para que lhe alcance efetivamente, seria mister a realização de uma verdadeira infinitude, que nos está necessariamente proibida… Por conseguinte, deve-se ater à idéia de uma aproximação indefinida, isto é, cada vez maior»[99]. Em lugar de falar de «a realização de uma certa infinitude», o que não poderia ter para nós nenhum sentido, diremos simplesmente que seria mister que uma certa indefinidade fora esgotada no que ela tem precisamente de inesgotável, ainda que, ao mesmo tempo, as possibilidades de desenvolvimento que implica esta indefinidade permitem obter uma aproximação tão grande como se queira, «*ut erro fiat minor dado*», segundo a expressão de Leibnitz, para quem «o método é seguro» desde que se atinge esse resultado. «O próprio do limite e o que faz que a variável não lhe alcance nunca exatamente, é ter uma definição diferente da de variável; e a variável, por seu lado, ainda que se aproxima cada vez mais ao limite, não lhe atinge, porque não deve deixar de satisfazer nunca a sua definição primitiva, que, dizemos, é diferente. A distinção necessária entre as duas definições do limite e da variável se encontram por todas partes… Este fato, de que as duas definições são logicamente diferentes e, não obstante, tais que os objetos definidos podem aproximar-se cada vez mais um ao outro[100], dá

[98] L. Couturat, *De l'infini mathématique*, p. 268, nota. — É o ponto de vista que expõe concretamente na *Justification du Calcul des infinitésimales par celui de l'Albèbre ordinaire*.

[99] Ch. de Freycinet, *De l'Analyse infinitésimale*, p. 18.

[100] Seria mais exato dizer que um deles pode aproximar-se cada vez mais do outro, já que só um desses objetos é variável, enquanto o outro é essencialmente fixo, e já que assim, em razão mesma da definição do limite, sua aproximação não pode considerar-se de nenhuma maneira como constituindo uma relação recíproca e cujos dois termos seriam em certo modo intercambiáveis; esta irreciprocidade implica ademais que sua diferença é de ordem propriamente qualitativo.

conta do que parece ter de estranho, à primeira vista, a impossibilidade de fazer coincidir nunca duas quantidades cuja diferença se está seguro de poder fazer que diminua além de toda expressão»[101].

Apenas há necessidade de dizer que, em virtude da tendência a reduzi-lo todo exclusivamente ao quantitativo, não faltou a reprovação, a esta concepção do limite, de ter introduzido uma diferença qualitativa na ciência das quantidades mesma; mas, se fosse mister eliminá-la por esta razão, seria mister igualmente que na geometria se proibisse de tudo, entre outras coisas, a consideração da similitude, que é puramente qualitativa também, bem como já o explicamos em outra parte, já que não concerne mais do que à forma das figuras fazendo abstração de sua magnitude, e portanto, de todo elemento propriamente quantitativo. Ademais, é bom observar, a este propósito, que um dos principais usos do cálculo diferencial é determinar as direções das tangentes em cada ponto de uma curva, direções cujo conjunto define a forma mesma da curva, e que direção e forma são precisamente, na ordem espacial, elementos cujo caráter é essencialmente qualitativo[102]. Ademais, não é uma solução pretender suprimir pura e simplesmente o «passo ao limite», sob pretexto de que o matemático pode dispensar-se de passar a ele efetivamente, e porque isso não lhe molestará de nenhuma maneira para levar seu cálculo até o final; isso pode ser certo, mas o que importa é isto: ¿até que ponto, nestas condições, terá o direito de considerar esse cálculo como repousando sobre um raciocínio rigoroso, e, inclusive se «o método é seguro» assim, não será só enquanto simples método de aproximação? Se poderia objetar que a concepção que acabamos de expor faz também impossível o «passo ao limite», já que este limite tem justamente como caráter não poder ser alcançado; mas isso não é certo mais do que em um certo sentido, e só enquanto se considerem as quantidades variáveis como tais, já que não dissemos que o limite não possa ser alcançado de nenhuma maneira, senão, e isso é o que é essencial precisar bem, que não podia ser alcançado na variação e como término[103] desta. O que é verdadeiramente impossível, é unicamente a concepção do «passo ao limite» como constituindo a consumação de uma variação contínua; por conseguinte, devemos substituir esta concepção por outra, e é o que faremos mais explicitamente a seguir.

---

[101] Ch. de Freycinet, *De l'Analyse infinitésimale*, p. 19.

[102] Ver *El Reino de la Cantidad y los Signos de los Tiempos*, cap. IV.

[103] Término é usado como "o último termo". N. do t.

CAPÍTULO XIII

CONTINUIDADE E PASSO AO LIMITE

Podemos voltar agora ao exame da «lei de continuidade», ou, mais exatamente, do aspecto desta lei que havíamos deixado momentaneamente de lado, e que é aquele pelo que Leibnitz crê poder justificar o «passo ao limite», porque, para ele, disso resulta «que, nas quantidades descontínuas, o caso extremo exclusivo pode ser tratado como inclusivo, e porque assim este último caso, ainda que totalmente diferente em natureza, está como contido em estado latente na lei geral dos demais casos»[104]. Ainda que ele não pareça suspeitá-lo, é justamente aí onde reside o principal defeito lógico de sua concepção da continuidade, como é bastante fácil dar-se conta disso pelas conseqüências que saca e pelas aplicações que faz dela; tenho aqui, efetivamente, alguns exemplos: «Em virtude de minha lei da continuidade, é permissível considerar o repouso como um movimento infinitamente pequeno, isto é, como equivalente a uma espécie de seu contraditório, e a coincidência como uma distância infinitamente pequena, e a igualdade como última das desigualdades, etc.»[105]. E também: «De acordo com esta lei da continuidade que exclui todo salto na mudança, o caso do repouso pode considerar-se como um caso especial do movimento, a saber, como um movimento evanescente ou mínimo, e o caso da igualdade como um caso de desigualdade evanescente. Disso resulta que as leis do movimento devem ser estabelecidas de tal maneira que não haja necessidade de regras particulares para os corpos em equilíbrio e em repouso, senão que estas nasçam por si mesmas das regras que concernem aos corpos em desequilíbrio e em movimento; ou, se se querem enunciar regras particulares para o repouso e o equilíbrio, é mister prevernir-se de que não sejam tais que não possam concordar com a hipótese que toma o repouso por um movimento nascente ou a igualdade pela última desigualdade»[106]. Agregamos ainda esta última citação sobre este tema, na que encontramos um novo exemplo de um gênero um pouco diferente dos precedentes, ainda que não menos contestável desde o ponto de vista lógico: «Ainda que não seja certo em rigor que o repouso é uma espécie de movimento, ou que a igualdade é uma espécie de desigualdade, como também não é certo que o círculo é uma espécie de polígono regular, não obstante se pode dizer que o repouso, a igualdade e o círculo terminam os movimentos, as desigualdades e os polígonos regulares, que por mudança contínua chegam a eles ao desvanecer-se. E ainda que estas terminações sejam exclusivas, isto é, não compreendidas em rigor nas variedades que limitam, não obstante

---

[104] *Epístola ad V. Cl. Christianum Wolfium, Professorem Mathessos Halensem, circa Scientiam Infiniti, en las Acta Eruditorum de* Leipzig, 1713.
[105] Carta ya citada a Varignon, 2 de febrero de 1702.
[106] *Specimen Dynamicum*, ya citado más atrás.

têm suas propriedades, como se estivessem compreendidas nelas, segundo a linguagem dos infinitos ou infinitesimais, que toma o círculo, por exemplo, por um polígono regular cujo número de lados é infinito. De outro modo a lei de continuidade seria violada, isto é, que, já que passa dos polígonos ao círculo por uma mudança contínua e sem fazer saltos, é mister também que não se façam saltos no passo das alterações dos polígonos às do círculo»[107] .

Convém dizer que, como o indica o começo da última passagem que acabamos de citar, Leibnitz considera estas asserções como se fossem do gênero daquelas que não são mais do que «*toleranter verae*», e que, por outra parte, ele mesmo diz, «servem sobretudo à arte de inventar, ainda que, a meu juízo, encerram algo de fictício e de imaginário, que, não obstante, pode ser retificado facilmente pela redução às expressões ordinárias, a fim de que não possa produzir-se erro»[108]; ¿mas são elas mesmas só isso, e não encerram, mais certamente em realidade, contradições puras e simples? Sem dúvida, Leibnitz reconhecia que o caso extremo, ou o «*ultimus casus*», é «*exclusivus*», o que supõe manifestamente que está fora da série dos casos que entram naturalmente na lei geral; ¿mas com que direito pode-se fazer entrar então apesar de tudo nesta lei e tratar-lhe «*ut inclusivum*», isto é, como se não fora mais do que um simples caso particular compreendido nesta série? É certo que o círculo é o limite de um polígono regular cujo número de lados cresce indefinidamente, mas sua definição é essencialmente outra que a dos polígonos; e se vê muito claramente, em um exemplo como esse, a diferença qualitativa que existe, como já o dissemos, entre o limite mesmo e aquilo do qual é o limite. O repouso não é de nenhuma maneira um caso particular do movimento, nem a igualdade um caso particular da desigualdade, nem a coincidência um caso particular da distância, nem o paralelismo um caso particular da convergência; ademais, Leibnitz não admite que o sejam em um sentido rigoroso, mas por isso não deixa de sustentar que de alguma maneira podem considerar-se como tais, de sorte que «o gênero se acaba na espécie quase oposta»[109], e que algo pode ser «equivalente a uma espécie de seu contraditório». Ademais, notemo-lo de passagem, é à mesma ordem de idéias ao que parece referir-se a noção da «virtualidade», concebida por Leibnitz, no sentido especial que ele lhe dá, como uma potência que seria um ato que começa[110], o que não é menos contraditório ainda do que os outros exemplos que acabamos de citar.

---

[107] *Justification du Calcul des infinitésimales par celui de l'Algèbre ordinaire*, nota anexada à carta de Varignon a Leibnitz do 23 de maio de 1702, na que se menciona a mesma como tendo sido enviada por Leibnitz para ser inserida no Journal de Trévoux. — Leibnitz toma a palavra «continuado» no sentido de «contínuo».

[108] *Epístola ad V. Cl. Christianum Wolfium*, já citada mais atrás.

[109] *Initia Rerum Mathematicarum Metaphisica*. — Leibnitz diz textualmente: « *genus in quasi-especiem oppositam desinit*», e o emprego desta singular expressão «quase-espécies» parece indicar ao menos uma certa dificuldade para dar uma aparência plausível a um tal enunciado.

[110] Bem entendido que as palavras «ato» e «potência» estão tomadas aqui em seu sentido aristotélico e escolástico.

Se considerem as coisas desde o ponto de vista que se considerem, não vemos em absoluto como uma certa espécie poderia ser um «caso limite» da espécie ou do gênero oposto, já que não é neste sentido como os opostos se limitam reciprocamente, senão, muito ao contrário, é neste sentido no que se excluem, e é impossível que os contraditórios sejam redutíveis um ao outro; e, ademais, ¿pode a desigualdade, por exemplo, guardar uma significação de outro modo que na medida em que se opõe à igualdade e na que é sua negação? Não podemos dizer, certamente, que asserções como essas sejam sequer «*toleranter verae*»; ainda que não se admitisse a existência de gêneros absolutamente separados, por isso não seria menos certo que um gênero qualquer, definido como tal, não possa nunca vir a ser parte integrante de outro gênero igualmente definido e cuja definição não inclui a sua própria, se é que inclusive não a exclui formalmente como no caso dos contraditórios; e que, se pode estabelecer-se uma comunicação entre gêneros diferentes, não pode ser por onde diferem efetivamente, senão só por meio de um gênero superior no qual entram igualmente um e o outro. Uma tal concepção da continuidade, que acaba suprimindo não só toda separação, senão inclusive toda distinção efetiva, ao permitir o passo direto de um gênero a outro sem redução a um gênero superior ou mais geral, é propriamente a negação mesma de todo princípio verdadeiramente lógico; daí à afirmação hegeliana da «identidade dos contraditórios», não há mais do que um passo que é pouco difícil de dar.

CAPÍTULO XIV

AS «QUANTIDADES EVANESCENTES»

Para Leibnitz, a justificativa do «passo ao limite» consiste, em suma, em que o caso particular das «quantidades evanescentes[111]», como ele diz, deve, em virtude da continuidade, entrar em um certo sentido na regra geral; e, ademais, essas quantidades evanescentes não podem considerar-se como «*nadas absolutas*», ou como puros zeros, já que, sempre em razão da mesma continuidade, guardam entre si uma relação determinada, e geralmente diferente da unidade, no instante mesmo em que se desvanecem[112], o que supõe que são ainda verdadeiras quantidades, ainda que «inasignables» em relação às quantidades ordinárias[113]. Não obstante, se as quantidades evanescentes, ou, o que equivale ao mesmo, as quantidades infinitesimais, não são «*nadas absolutas*», e isso inclusive quando se trata dos diferenciais de ordens superiores ao primeiro, devem ser consideradas como «*nadas relativas*», isto é, que, ainda que guardam o caráter de verdadeiras quantidades, podem e devem inclusive ser desdenhadas a respeito das quantidades ordinárias, com as quais são «incomparáveis»[114]; mas, multiplicadas por quantidades «infinitas», ou incomparavelmente maiores que as quantidades ordinárias, reproduzem quantidades ordinárias, o que não poderia ser se não fossem absolutamente nada. Pelas definições que demos precedentemente, pode-se ver que o fato de que a consideração da relação entre as quantidades evanescentes permaneça determinada se refere ao cálculo diferencial, e que o fato de que a multiplicação destas mesmas quantidades evanescentes por quantidades «infinitas» de quantidades ordinárias se refere ao cálculo integral. Em tudo isto, a dificuldade está em admitir que umas quantidades que não são absolutamente nulas devam ser tratadas no entanto como nulas no cálculo, o que corre o risco de dar a impressão de que não se trata mais do que de uma simples aproximação; a este respeito ainda, Leibnitz parece invocar às vezes a «lei de continuidade», pela qual o

---

[111] Evanescente: que desaparece. Dicionário Aurélio, 1975. Nota do tradutor.

[112] Desvanecer-se: **anular-se**, fazer-se passar ou desaparecer-se; dissipar-se, extinguir-se. Aurélio digital. N. do t.

[113] Para Leibnitz, $\frac{0}{0} = 1$, porque, diz, «um nada equivale ao outro»; mas, como, por outra parte, tem-se $0 \times n = 0$, e isso qualquer que seja o numero *n*, é evidente que pode escrever-se também $\frac{0}{0} = n$, e é por isso pelo que esta expressão $\frac{0}{0}$ se considera geralmente como representando o que se chama uma «forma indeterminada».

[114] A diferença entre isto e a comparação do grão de areia está em que, desde que se fala de «quantidades evanescentes», isso supõe necessariamente que se trata de quantidades variáveis, e já não de quantidades fixas e determinadas, por pequenas que se as suponha.

«caso limite» se encontra reduzido à regra geral, como o único postulado que exige seu método; mas este argumento é muito pouco claro, e é mister voltar mais à noção dos «incomparáveis», como ele mesmo o faz com freqüência, para justificar a eliminação das quantidades infinitesimais nos resultados do cálculo.

Efetivamente, Leibnitz considera como iguais, não só as quantidades cuja diferença é nula, senão também aquelas cuja diferença é incomparável com essas quantidades mesmas; é sobre esta noção dos «incomparáveis» onde se apóia para ele, não só a eliminação das quantidades infinitesimais, que desaparecem assim ante as quantidades ordinárias, senão também a distinção das diferentes ordens de quantidades infinitesimais ou de diferenciais, já que as quantidades de cada um destas ordens são incomparáveis com as da precedente, assim como as de primeira ordem o são com as quantidades ordinárias, mas sem que se chegue nunca a «*nadas absolutas*». «Chamo magnitudes incomparáveis, diz Leibnitz, àquelas das quais uma, multiplicada por qualquer número finito que seja, não poderia exceder à outra, da mesma maneira que Euclides o tomou em sua quinta definição do quinto livro»[115]. Ademais, nisso não há nada que indique se esta definição deve entender-se de quantidades fixas e determinadas ou de quantidades variáveis; mas se pode admitir que, em toda sua generalidade, deve aplicar-se indistintamente a um e outro caso: toda a questão seria saber então se duas quantidades fixas, por diferentes que sejam na escala das magnitudes, podem considerar-se alguma vez como realmente «incomparáveis», ou se não são tais mais do que relativamente aos meios de medida de que dispomos. Mas não há lugar a insistir aqui sobre este ponto, já que Leibnitz mesmo declarou que este caso não é o dos diferenciais[116], de onde é mister concluir, não só que a comparação do grão de areia era manifestamente errônea em si mesma, senão também que não respondia no fundo, em seu próprio pensamento, à verdadeira noção dos «incomparáveis», ao menos enquanto esta noção deve aplicar-se às quantidades infinitesimais.

Não obstante, alguns creram que o cálculo infinitesimal não poderia fazer-se perfeitamente rigoroso mais do que na condição das quantidades infinitesimais poderem considerar-se como nulas, e, ao mesmo tempo, pensaram equivocadamente que um erro podia supor-se nulo desde que podia supor-se tão pequeno como se queira; equivocadamente, dizemos, já que isso equivale a admitir que uma variável, como tal, pode alcançar seu limite. Tenho aqui, ademais, o que Carnot diz a este respeito: «Há pessoas que crêem ter estabelecido suficientemente o princípio da análise infinitesimal quando fizeram este raciocínio: é evidente, dizem, e confessado por todo mundo que os erros aos que os procedimentos da análise infinitesimal dariam ensejo, se é que os há, sempre poderiam supor-se tão pequenos como se queira; é evidente também que todo erro que se está seguro de supor tão pequeno como se queira é nulo, já que pode supor-se tão pequeno como se queira, pode supor-se zero; portanto, os resultados da análise infinitesimal são rigorosamente exatos. Este raciocínio, plausível à primeira vista, não

[115] Carta al marqués del Hospital, 14-24 de junio de 1695.

[116] Carta ya citada a Varignon, 2 de febrero de 1702.

obstante não é justo, já que é falso dizer que, porque se está em disposição de fazer um erro tão pequeno como se queira, pode-se por isso fazer-lhe absolutamente nulo... Um encontra-se na alternativa necessária de cometer um erro, por pequeno que queira supor-lhe, ou de cair sobre uma fórmula que não ensina nada, e tal é precisamente o núcleo da dificuldade na análise infinitesimal»[117].

É certo que uma fórmula em que entra uma relação que se apresenta sob a forma

$$\frac{0}{0}$$

«não ensina nada», e se pode dizer inclusive que não tem nenhum sentido por si mesma; não é senão em virtude de uma convenção, ademais justificada, como se pode dar um sentido a esta forma

$$\frac{0}{0}$$

considerando-a como um símbolo de indeterminação[118]; mas esta indeterminação mesma faz com que a relação, tomada sob esta forma, possa ser igual a não importa que, enquanto, ao contrário, em cada caso particular, deve conservar um valor determinado: é a existência deste valor determinado o que alega Leibnitz[119], e este argumento é, em si mesmo, perfeitamente inatacável[120]. Unicamente, é mister reconhecer que a noção das «quantidades evanescentes», segundo a expressão de Lagrange, tem «o grande inconveniente de considerar as quantidades no estado em que, por assim dizer, deixam de ser quantidades»; mas, contrariamente ao que pensava Leibnitz, não há necessidade de considerá-las precisamente no instante em que se desvanecem, nem de admitir que possam desvanecer-se verdadeiramente, já que, nesse caso, deixariam efetivamente de ser quantidades. Ademais, isto supõe essencialmente que não há «infinitamente pequeno» tomado «em rigor», já que este «infinitamente pequeno», ou ao menos o que se chamaria assim adotando a linguagem de Leibnitz, não poderia ser mais que zero, do mesmo modo que um «infinitamente grande», entendido no mesmo sentido, não poderia ser mais do que o «número infinito»; mas, em realidade, zero não é um número, e não há mais «quantidade nula» do que «quantidade infinita». O zero matemático, em sua acepção estrita e rigorosa, nada mais é do que uma negação, ao menos sob o aspecto quantitativo, e não se pode dizer que a ausência de quantidade constitui ainda uma quantidade; esse é um ponto sobre o que vamos voltar em seguida para desenvolver mais completamente as diversas conseqüências que resultam dele.

Em suma, a expressão de «quantidades evanescentes» tem sobretudo o defeito de prestar-se a um equívoco, e fazer crer que as quantidades infinitesimais se

---

[117] *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, p. 36.

[118] Ver a nota precedente sobre este tema.

[119] Com a diferença de que, para ele, a relação $\frac{0}{0}$ não é indeterminada, senão sempre igual a 1, assim como o dissemos mais atrás, enquanto o valor de que se trata difere em cada caso.

[120] Cf. Ch. de Freycinet, *De l'Analyse infinitésimale*, pp. 45-46: «Se os incrementos se reduzem ao estado de puros zeros, já não têm nenhuma significação. O importante aqui não é serem rigorosamente nulos, senão indefinidamente decrescentes, sem poder confundir-se nunca com zero, em virtude do princípio geral de que uma variável nunca pode coincidir com seu limite».

consideram como quantidades que se anulam efetivamente, já que, a menos que se mude o sentido das palavras, é difícil compreender que «desvanecer-se», quando se trata de quantidades, pode querer dizer outra coisa que anular-se. Em realidade, estas quantidades infinitesimais, entendidas como quantidades indefinidamente decrescentes, o que é sua verdadeira significação, não podem chamar-se nunca «evanescentes» no sentido próprio desta palavra, e, certamente, tivesse sido preferível não introduzir esta noção, que, no fundo, é afim à concepção que Leibnitz se fazia da continuidade, e que, como tal, implica inevitavelmente o elemento de contradição que é inerente ao ilogismo desta concepção mesma. Agora bem, se um erro, ainda que possa fazer-se tão pequeno como se queira, não pode tornar-se nunca absolutamente nulo, ¿como poderá ser verdadeiramente rigoroso o cálculo infinitesimal?; e, se de fato o erro é praticamente desdenhável, ¿será mister concluir disso que este cálculo se reduz a seu simples método de aproximação, ou ao menos, como o disse Carnot, de «compensação»? Esta é uma questão que teremos que resolver a seguir; mas, já que fomos levados a falar aqui do zero e da pretendida «quantidade nula», vale mais tratar primeiro este tema, cuja importância, como se verá, está muito longe de ser desdenhável.

CAPÍTULO XV

ZERO NÃO É UM NÚMERO

O decrescimento indefinido dos números não pode concluir em um «número nulo» assim como seu crescimento indefinido não pode concluir tampouco em um «número infinito», e isso pela mesma razão, já que um desses números deveria ser o inverso do outro; efetivamente, segundo o que dissemos precedentemente a respeito dos números inversos, que estão igualmente afastados da unidade nas duas sucessões, crescente uma e decrescente a outra, que têm como ponto de partida comum esta unidade, e que, como há necessariamente tantos termos numa das sucessões como na outra, os últimos termos, que seriam o «número infinito» e o «número nulo», deveriam, se existissem, estar igualmente afastados da unidade, e portanto ser inversos um do outro[121]. Nestas condições, se o signo

$$\infty$$

não é em realidade mais do que o símbolo das quantidades indefinidamente crescentes, o signo

$$0$$

deveria logicamente poder ser tomado como símbolo das quantidades indefinidamente decrescentes, a fim de expressar na notação a simetria que existe, como o dissemos, entre umas e outras; mas, desafortunadamente, este signo

$$0$$

tem já uma significação diferente, já que serve originariamente para designar a ausência de toda quantidade, enquanto o signo

$$\infty$$

não tem nenhum sentido real que corresponda a isso. Isso é uma nova fonte de confusões, como as que se produzem a propósito das «quantidades evanescentes», e seria mister, para evitá-las, criar para as quantidades indefinidamente decrescentes outro símbolo diferente do zero, já que estas quantidades têm como caráter não poder anular-se nunca em sua variação; em todo caso, com a notação empregada atualmente pelos matemáticos, parece quase impossível que tais confusões não se produzam.

---

[121] Isto seria representado, segundo a notação ordinária, pela fórmula $0 \times \infty = 1$; mas, de fato, a forma $0 \times \infty$ é também, como $\frac{0}{0}$, uma «forma indeterminada», e se pode escrever $0 \times \infty = n$, designando por n um número qualquer, o que, ademais, mostra já que, em realidade, 0 e ∞ não podem ser considerados como represetando números determinados. Ademais, voltaremos sobre este ponto. Por outra parte, há que destacar que $0 \times \infty$ corresponde, em respeito a «limites de somas» do cálculo integral, o que $\frac{0}{0}$ é em respeito a «limites de relações» do cálculo diferencial.

Se insistimos sobre esta observação de que zero, enquanto representa a ausência de toda quantidade, não é um número e não pode ser considerado como tal, ainda que isso possa parecer bastante evidente àqueles que nunca tiveram a ocasião de ter conhecimento de algumas discussões, é porque, desde que se admite a existência de um «número nulo», que deve ser o «menor dos números», é-se conduzido forçosamente a supor correlativamente, como seu inverso, um «número infinito», no sentido do «maior dos números». Portanto, se se aceita este postulado de que zero é um número, a argumentação em favor do «número infinito» pode ser depois perfeitamente lógica [122]; mas é precisamente este postulado o que devemos recusar, já que, se as conseqüências que se deduzem dele são contraditórias, e temos visto que a existência do «número infinito» o é efetivamente, é porque, em si mesmo, implica já contradição. Efetivamente, a negação da quantidade não pode ser assimilada de nenhuma maneira a uma quantidade; a negação do número ou da magnitude não pode constituir em nenhum sentido nem a nenhum grau uma espécie do número ou da magnitude; pretender o contrário, é sustentar que, segundo a expressão de Leibnitz, algo pode ser «equivalente a uma espécie de seu contraditório», e outro tanto valeria dizer a seguir que a negação da lógica é a lógica mesma.

Portanto, é contraditório falar de zero como de um número, ou supor um «zero de magnitude» que seria ainda uma magnitude, de onde resultaria forçosamente a consideração de tantos zeros distintos como diferentes espécies de magnitudes há; em realidade, não pode ter mais do que o zero puro e simples, que não é outra coisa que a negação da quantidade, sob qualquer modo em que esta se considere[123]. Desde que tal é o verdadeiro sentido do zero aritmético tomado «em rigor», é evidente que este sentido não tem nada em comum com a noção das quantidades indefinidamente decrescentes, que são sempre quantidades, e não uma ausência de quantidade, como tampouco com algo que seria em certo modo intermediário entre zero e a quantidade, o que seria ainda uma concepção perfeitamente ininteligível, e que, em sua ordem, recordaria bastante a «virtualidade» leibnitzniana da que dissemos algumas palavras precedentemente.

Podemos voltar agora à outra significação que o zero tem de fato na notação habitual, a fim de ver como puderam introduzir-se as confusões de que falamos: dissemos precedentemente que um número pode ser considerado em certo modo como praticamente indefinido desde que já não nos é possível expressar-lhe ou representar-lhe

---

[122] De fato, é sobre este postulado onde repousa em grande parte a argumentação de L. Conturat em sua tese *De l'infini mathématique*.

[123] Disso resulta também que zero não pode ser considerado como um limite no sentido matemático desta palavra, já que um limite verdadeiro é sempre, por definição, uma quantidade; ademais, é evidente que uma quantidade que decresce indefinidamente não tem mais limite do que uma quantidade que cresce indefinidamente, ou que ao menos, uma e outra não podem ter outros limites que os que resultão necessariamente da natureza mesma da quantidade como tal, o que é uma acepção bastante diferente desta palavra «limite», ainda que, ademais, entre estes dois sentidos tenha uma certa relação que indicaremos mais adiante; matematicamente, não se pode falar mais do que do limite da relação de duas quantidades indefinidamente crescentes ou de duas quantidades indefinidamente decrescentes, e não do limite dessas quantidades mesmas.

distintamente de uma maneira qualquer; um tal número, qualquer que seja, na ordem crescente, poderá ser simbolizado só pelo signo

$$\infty,$$

enquanto este representa o indefinidamente grande; portanto, nisso não se trata de um número determinado, senão mais corretamente de todo um domínio, o que, ademais, é necessário para que seja possível considerar, no indefinido, desigualdades e inclusive ordens diferentes de magnitude. Na notação matemática, falta outro símbolo para representar o domínio que corresponde a esse na ordem decrescente, isto é, o que se pode chamar o domínio do indefinidamente pequeno; mas, como um número pertencente a este domínio é, de fato, desdenhável nos cálculos, tomou-se o hábito de considerar-lhe como praticamente nulo, ainda que isso não seja mais do que uma simples aproximação que resulta da imperfeição inevitável de nossos meios de expressão e de medida, e é sem dúvida por esta razão pelo que se chegou a simbolizar-lhe pelo mesmo signo

$$0,$$

que representa, por outra parte, a ausência rigorosa de toda quantidade. É só neste sentido como este signo

$$0$$

tornar-se, em certo modo, simétrico do signo

$$\infty,$$

e como podem ser colocados respectivamente nas duas extremidades da série dos números, tal como a consideramos precedentemente como estendendo-se indefinidamente, pelos números inteiros e por seus inversos, nos dois sentidos crescente e decrescente. Esta série se apresenta então sob a forma seguinte:

$$0 \ldots\ldots \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots \infty;$$

mas é mister observar que

$$0$$

e

$$\infty$$

não representam dois números determinados, que terminariam a série nos dois sentidos, senão dois domínios indefinidos, nos quais, ao contrário, não poderia ter últimos termos, em razão de sua indefinidade mesma; ademais, é evidente que o zero não poderia ser aqui nem um «número nulo», que seria um último termo no sentido decrescente, nem uma negação ou uma ausência de toda quantidade, que não pode ter nenhum lugar nesta série de quantidades numéricas.

Nesta mesma série, como o explicamos precedentemente, dois números eqüidistantes da unidade central são inversos ou complementares um do outro, e portanto reproduzem a unidade por sua multiplicação:

$$\frac{1}{n} \times n = 1,$$

de sorte que, para as duas extremidades da série, seríamos levados a escrever assim

$$0 \times \infty = 1;$$

mas, devido ao fato de que os signos

$$0$$

e

$$\infty,$$

que são os fatores desse último produto, não representam números determinados, segue-se que a expressão

$$0 \times \infty$$

mesma constitui um símbolo de indeterminação ou o que se chama uma «forma indeterminada», e se deve escrever então

$$0 \times \infty = n,$$

sendo

$$n$$

um número qualquer[124]; por isso não é menos certo que, de todos modos, somos levados assim ao finito ordinário, já que as duas indefinidades opostas se neutralizam por assim dizer uma à outra. Se vê também muito claramente aqui, uma vez mais, que o símbolo ∞ não representa o Infinito, já que o Infinito, em seu verdadeiro sentido, não pode ter nem oposto nem complementar, e não pode entrar em correlação com nada, como tampouco o zero, em qualquer sentido que se lhe entenda, pode entrar em correlação com a unidade ou com outro número qualquer, nem com nenhuma coisa particular de qualquer ordem que seja, quantitativo ou não; já que é o Todo universal e absoluto que contém tanto o Não Ser como o Ser, de sorte que o zero mesmo, desde que não se considera como um puro nada, deve ser considerado também, necessariamente, como compreendido no Infinito.

Ao fazer alusão aqui ao Não Ser, tocamos outra significação do zero, completamente diferente das que acabamos de considerar, e que, ademais, é a mais importante desde o ponto de vista de seu simbolismo metafísico; mas, a este respeito, para evitar toda confusão entre o símbolo e o que representa, é necessário precisar bem que o Zero metafísico, que é o Não Ser, não é já mais o zero de quantidade como a Unidade metafísica, que é o Ser, não é a unidade aritmética; o que se designa assim com estes termos não pode sê-lo mais do que por transposição analógica, já que, desde que um se coloca no Universal, está-se evidentemente além de todo domínio especial como o da quantidade. Ademais, não é enquanto representa o indefinidamente pequeno, como o zero, por uma tal transposição, pode ser tomado como símbolo do Não Ser; senão enquanto, segundo sua acepção matemática mais rigorosa, representa a ausência de quantidade, que, efetivamente, simboliza em sua ordem a possibilidade de não manifestação, do mesmo modo que a unidade simboliza a possibilidade de manifestação, já que é o ponto de partida da multiplicidade indefinida dos números como o Ser é o princípio de toda manifestação[125] .

---

[124] Ver a precedente nota sobre este tema.

[125] Sobre este tema, ver *Los Estados múltiples del ser*, cap. III.

Isto nos conduz a observar também que, de qualquer maneira que se considere o zero, não poderia, em todo caso, ser tomado por um puro nada, que não corresponde metafisicamente mais do que à impossibilidade, e que, ademais, logicamente, não pode ser representada por nada. Isso é muito evidente quando se trata do indefinidamente pequeno; é certo que nisso não se trata, se se quer, mais do que de um sentido derivado, devido, como o dizíamos faz um momento, a uma sorte de assimilação aproximada de uma quantidade, desdenhável para nós, a ausência de toda quantidade; mas, no que diz respeito à ausência mesma de quantidade, o que é nulo sob este aspecto pode muito bem não o ser sob outros aspectos, como se vê claramente por um exemplo como o do ponto, que, ao ser indivisível, é por isso mesmo inextenso, isto é, espacialmente nulo[126], mas que, bem como o expusemos em outra parte, por isso não é menos o princípio mesmo de toda a extensão[127]. Ademais, é verdadeiramente estranho que os matemáticos tenham geralmente o hábito de considerar o zero como um puro nada, e que não obstante lhes seja impossível não lhe olhar ao mesmo tempo como dotado de uma potência indefinida, já que, colocado à direita de outra cifra chamada «significante», contribui para formar a representação de um número que, pela repetição desse mesmo zero, pode crescer indefinidamente, como ocorre, por exemplo, no caso do número dez e de suas potências sucessivas. Se realmente o zero não fora mais do que um puro nada, isso não poderia ser assim, e inclusive, a dizer verdade, não seria então mas que um signo inútil, inteiramente desprovido de todo valor efetivo; por conseguinte, nas concepções matemáticas modernas, há nisso ainda outra inconsequência a agregar a todas as que já tivemos a ocasião de assinalar até aqui.

---

[126] É por isso pelo que, assim como o dissemos mais atrás, o ponto não pode ser considerado de nenhuma maneira como constituindo um elemento ou uma parte da extensão.
[127] Ver *El Simbolismo de la Cruz*, cap. XVI.

CAPÍTULO XVI

A NOTAÇÃO DOS NÚMEROS NEGATIVOS

Se voltamos de novo à segunda das duas significações matemáticas do zero, isto é, ao zero considerado como representando o indefinidamente pequeno, o que importa reter bem antes de mais nada, é que o domínio deste compreende, na sucessão duplamente indefinida dos números, tudo o que está além de nossos meios de avaliação de um certo sentido, do mesmo modo que o domínio do indefinidamente grande compreende, nesta mesma sucessão, tudo o que está além destes mesmos meios de avaliação no outro sentido. Dito isto, evidentemente não tem lugar falar de números «menores que zero», como tampouco de números «maiores que o infinito»; e isso é ainda mais inaceitável, se é possível, quando o zero, em sua outra significação, representa pura e simplesmente a ausência de toda quantidade, já que uma quantidade que fora menor que nada é propriamente inconcebível. Não obstante, isto é o que se quis fazer, em um certo sentido, ao introduzir nas matemáticas a consideração dos números chamados negativos, e ao esquecer, por um efeito do «convencionalismo» moderno, que estes números, na origem, não são nada mais que a indicação do resultado de uma subtração realmente impossível, pela qual um número maior deveria ser subtraído de um número menor; ademais, já fizemos observar que todas as generalizações ou as extensões da idéia de número não provém de fato mais do que da consideração de operações impossíveis desde o ponto de vista da aritmética pura; mas esta concepção dos números negativos e as conseqüências que entranha requerem ainda algumas outras explicações.

Dissemos precedentemente que a sucessão dos números inteiros se forma a partir da unidade, e não a partir de zero; efetivamente, dada a unidade, toda a sucessão dos números se deduz dela de tal sorte que se pode dizer que toda a sucessão está já implicada e contida em princípio nesta unidade inicial[128], enquanto de zero evidentemente não se pode sacar nenhum número. O passo do zero à unidade não pode fazer-se da mesma maneira que o passo da unidade aos demais números, ou de um número qualquer ao número seguinte, e, no fundo, supor possível este passo do zero à unidade, é ter estabelecido já implicitamente a unidade[129]. Em fim, colocar zero no

---

[128] Do mesmo modo, por transposição analógica, toda multiplicidade indefinida das possibilidades de manifestação está contida em princípio e «eminentemente» no Ser puro ou a Unidade metafísica.

[129] Isso aparece de uma maneira completamente evidente se, conformemente a lei geral de formação da sucessão dos números, representa-se este passo pela fórmula $0+1=1$.

começo da sucessão dos números, como se fosse o primeiro desta sucessão, não pode ter mais do que duas significações: ou é admitir realmente que zero é um número, contrariamente ao que estabelecemos, e, portanto, que pode ter com os demais números relações da mesma ordem que as relações destes números entre si, o que não pode ser, já que zero multiplicado ou dividido por um número qualquer dá sempre zero; ou é um simples artifício de notação, que não pode senão entranhar confusões mais ou menos inextricáveis. De fato, o emprego deste artifício se justifica apenas se é para permitir a introdução da notação dos números negativos, e, se o uso desta notação oferece sem dúvida algumas vantagens para a comodidade dos cálculos, consideração completamente «pragmática» que não está em litígio aqui e que carece inclusive de importância verdadeira sob nosso ponto de vista, é fácil dar-se conta de que não deixa de apresentar, por outra parte, graves inconvenientes lógicos. A primeira de todas as dificuldades às que dá ensejo a este respeito, é precisamente a concepção das quantidades negativas como «menores que zero», que Leibnitz colocava entre as afirmações que não são mais do que «*toleranter verae*», mas que, em realidade, como o dizíamos faz um momento, está desprovida de toda significação. «Adiantar que uma quantidade negativa isolada é menor que zero, disse Carnot, é cobrir a ciência das matemáticas, que deve ser a da evidência, de uma nuvem impenetrável, e comprometer-se em um labirinto de paradoxos a qual mais extravagante»[130]. Sobre este ponto, podemos ater-nos a este juízo, que não é suspeito e que certamente não tem nada de exagerado; ademais, no uso que se faz desta notação dos números negativos, não se deveria esquecer nunca que nisso não se trata de nada mais que de uma simples convenção.

A razão desta convenção é a seguinte: quando uma subtração é aritmeticamente impossível, seu resultado é não obstante susceptível de uma interpretação no caso em que esta subtração se refira à magnitudes que podem ser contadas em dois sentidos opostos, como, por exemplo, as distâncias medidas numa linha, ou os ângulos de rotação ao redor de um ponto fixo, ou também os tempos contados, a partir de um certo instante, para o futuro ou para o passado. Daí a representação geométrica que se dá habitualmente destes números negativos: se se considera uma reta inteira, indefinida nos dois sentidos, e não só uma semi-reta como o havíamos feito precedentemente, as distâncias sobre esta reta se contam como positivas ou como negativas segundo sejam percorridas em um sentido ou no outro, e se fixa um ponto tomado como origem, a partir do qual as distâncias se chamam positivas de um lado e negativas do outro. A cada ponto da reta corresponderá um número que será a medida de sua distância à origem, e que, para simplificar a linguagem, podemos chamar seu coeficiente; a origem mesma, neste caso também, terá naturalmente como coeficiente zero, e o coeficiente de qualquer outro ponto da reta será um número afetado pelo sinal + ou −, sinal que, em realidade, indicará simplesmente de que lado está situado esse ponto em relação à

[130] «Nota sobre as quantidades negativas» colocada ao final das *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, p. 173.

origem. Sobre uma circunferência, se poderá distinguir de igual modo um sentido de rotação positivo e um sentido de rotação negativo, e contar, a partir de uma posição inicial do raio, os ângulos como positivos ou como negativos segundo se descrevam em um ou outro destes dois sentidos, o que daria lugar a umas precisões análogas. Para aternos à consideração da reta, dois pontos eqüidistantes da origem, por uma e outra parte desta, terão por coeficiente o mesmo número, mas com sinais contrários, e um ponto mais afastado do que outro da origem terá naturalmente como coeficiente, em todos os casos, um número maior; por isto se vê que, se um número

$$n$$

é maior que outro número

$$m,$$

é absurdo dizer, como se faz ordinariamente, que

$$-n$$

é menor que

$$-m,$$

já que representa ao contrário uma distância maior. Ademais, o sinal colocado assim adiante de um número não pode modificar-se realmente de nenhuma maneira desde o ponto de vista da quantidade, já que não representa nada que se refira à medida das distâncias em si mesmas, senão só a direção na que são percorridas estas distâncias, direção que é um elemento de ordem propriamente qualitativo e não quantitativo[131].

Por outra parte, já que a reta é indefinida nos dois sentidos, pode-se ser levado a considerar um indefinido positivo e um indefinido negativo, que se representam respectivamente pelos signos

$$+\infty$$

e

$$-\infty,$$

e que se designam comumente pelas expressões absurdas de «mais infinito» e «menos infinito»; pode-se perguntar o que poderia ser efetivamente um infinito negativo, ou também o que poderia subsistir se de algo ou inclusive de nada, já que os matemáticos consideram o zero como nada, ficar restado o infinito; estas são coisas que basta enunciar em linguagem clara para ver imediatamente que estão desprovidas de toda significação. É mister agregar também que seguidamente um é levado, em particular no estudo da variação das funções, a considerar o indefinido negativo como confundindo-se com o indefinido positivo, de tal sorte que um corpo móvel que parte da origem e que se afasta constantemente dele no sentido positivo voltaria de novo para este pelo lado negativo, ou inversamente, se seu movimento se prosseguisse durante um tempo indefinido, de onde resulta que a reta, ou o que se considera como tal, deve ser em

---

[131] Ver *O Reino da Quantidade e os Sinais dos Tempos*, cap. IV. — poderia-se perguntar se não há como uma sorte de recordação inconsciente deste caráter qualitativo no fato de que os matemáticos designem ainda, às vezes, os números tomados «com seu sinal», isto é, considerados como positivos ou negativos, sob o nome de «números qualificados», ainda que, ademais, não pareçam dar nenhum sentido muito claro a esta expressão.

realidade uma linha fechada, ainda que indefinida. Ademais, se poderia mostrar que as propriedades da reta no plano são inteiramente análogas às de um grande círculo ou círculo diametral sobre a superfície de uma esfera, e que assim o plano e a reta podem ser comparados a uma esfera e a um grande círculo de raio indefinidamente grande, e por conseqüência de curvatura indefinidamente pequena, sendo comparados, então, os círculos ordinários do plano aos círculos pequenos desta mesma esfera; ademais, esta comparação, para tornar-se rigorosa, supõe um «passo ao limite», já que é evidente que, por grande que adquire o raio em seu crescimento indefinido, tem-se sempre uma esfera e não um plano, e que esta esfera só tende a confundir-se com o plano, e seus grandes círculos com retas, de tal sorte que o plano e a reta são aqui limites, da mesma maneira que o círculo é o limite de um polígono regular cujo número de lados cresce indefinidamente. Sem insistir mais nisso, só faremos observar que se percebem em certo modo diretamente, pelas considerações deste gênero, os limites mesmos da indefinidade espacial; por conseguinte, se se quer guardar alguma aparência de lógica, ¿como se pode falar ainda de infinito em tudo isto?

Ao considerar os números positivos e negativos como acabamos de dizê-lo, a série dos números toma a forma seguinte:

$$-\infty \ldots \ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \ldots +\infty,$$

onde a ordem destes números é a mesma que o dos pontos correspondentes sobre a reta, isto é, dos pontos que têm estes mesmos números por coeficientes respectivos, o que, ademais, é a marca da origem real da série assim formada. Esta série, ainda que seja igualmente indefinida nos dois sentidos, é completamente diferente da que consideramos precedentemente e que compreendia os números inteiros e seus inversos: é simétrica, já não em relação à unidade, senão em relação ao zero, que corresponde à origem das distâncias; e, se dois números eqüidistantes deste termo central lhe reproduzem também, já não é por multiplicação como no caso dos números inversos, senão por adição «algébrica», isto é, efetuada tendo em conta seus sinais, o que aqui é aritméticamente uma subtração. Por outra parte, esta nova série não é, como o era a precedente, indefinidamente crescente em um sentido e indefinidamente decrescente no outro, ou ao menos, se se pretende considerá-la assim, nada mais é do que por uma «maneira de falar» das mais incorretas, que é a mesma pela que se consideram os números «menores que zero»; em realidade, esta série é indefinidamente crescente nos dois sentidos igualmente, já que o que compreende por uma parte e por outra do zero central, é a mesma sucessão dos números inteiros; o que se chama o «valor absoluto», expressão bastante singular também, deve tomar-se em consideração só sob a relação puramente quantitativa, e os sinais positivos ou negativos não mudam nada a este respeito, já que, em realidade, não expressam outra coisa que as relações de «situação» que explicamos faz um momento. O indefinido negativo não é pois comparável de nenhuma maneira ao indefinidamente pequeno; ao contrário, como ocorre com o indefinido positivo, é indefinidamente grande; a única diferença, que não é de ordem quantitativo, é que se desenvolve em outra direção, o que é perfeitamente concebível quando se trata de magnitudes espaciais ou temporárias, mas totalmente desprovido de

sentido para magnitudes aritméticas, para as quais um tal desenvolvimento é necessariamente único, e não pode ser outro que o da série dos números inteiros.

Entre as outras conseqüências extravagantes ou ilógicas da notação dos números negativos, assinalaremos também a consideração, introduzida pela resolução das equações algébricas, das quantidades chamadas «imaginárias», que Leibnitz, como o vimos, colocava, da mesma maneira que as quantidades infinitesimais, entre o que chamava «ficções bem fundadas»; estas quantidades, ou supostas tais, apresentam-se como raízes dos números negativos, o que, em realidade, não responde tampouco mais do que a uma impossibilidade pura e simples, já que, ainda que um número seja positivo ou negativo, seu quadrado é sempre necessariamente positivo em virtude das regras da multiplicação algébrica. Inclusive se, dando a essas quantidades «imaginárias» outro sentido, pudesse-se conseguir fazê-las corresponder a algo real, o que não examinaremos aqui, é bem certo, em todo caso, que sua teoria e sua aplicação à geometria analítica, tal como são expostas pelos matemáticos atuais, não aparecem apenas mais do que como um verdadeiro tecido de confusões e inclusive de absurdidades, e como o produto de uma necessidade de generalizações excessivas e completamente artificiais, que não retrocede sequer ante o enunciado de proposições manifestamente contraditórias; alguns teoremas sobre as «assíntotas do círculo», por exemplo, bastariam amplamente para provar que não exageramos nada. Se poderá dizer, é certo, que nisso não se trata de geometria propriamente dita, senão somente, como na consideração da «quarta dimensão» do espaço[132], de álgebra traduzida à linguagem geométrica; mas o que é grave, precisamente, é que, porque uma tal tradução, assim como seu sentido inverso, seja possível e legítima numa certa medida, se a queira estender também aos casos nos que já não pode significar nada, já que isso é efetivamente o sintoma de uma extraordinária confusão nas idéias, ao mesmo tempo que a extrema conclusão de um «convencionalismo» que chega até perder o sentido de toda realidade.

[132] Cf. *El Reino de la Cantidad y los Signos de los Tiempos*, cap. XVIII e XXIII.

CAPÍTULO XVII

REPRESENTAÇÃO DO EQUILÍBRIO DAS FORÇAS

A propósito dos números negativos, e ainda que não seja mais do que uma digressão em relação ao tema principal de nosso estudo, falaremos também das conseqüências muito contestáveis do emprego destes números desde o ponto de vista da mecânica; em realidade, por seu objeto, esta é uma ciência física, e o fato mesmo de tratá-la como uma parte integrante das matemáticas, conseqüência do ponto de vista exclusivamente quantitativo da ciência atual, não deixa de introduzir nela singulares deformações. A este respeito, dizemos somente que os pretendidos «princípios» sobre os quais os matemáticos modernos fazem repousar esta ciência tal como a concebem, e que não se chamam assim mais do que de uma maneira completamente abusiva, não são propriamente mais do que hipóteses mais ou menos bem fundadas, ou também, no caso mais favorável, simples leis mais ou menos gerais, quiçá mais gerais do que outras, se se quer, mas que, em todo caso, não têm nada em comum com os verdadeiros princípios universais, e que, numa ciência constituída segundo o ponto de vista tradicional, não seriam mais do que aplicações destes princípios a um domínio ainda muito especial. Sem querer entrar em desenvolvimentos demasiado longos, citaremos, como exemplo do primeiro caso, o suposto «princípio de inércia», que não poderia justificar nada, nem a experiência que mostra ao contrário que não há inércia em nenhuma parte da natureza, nem o entendimento que não pode conceber esta pretendida inércia, já que esta não pode consistir mais do que na ausência completa de toda propriedade; só se poderia aplicar legitimamente uma tal palavra à potencialidade pura da substância universal, ou da *materia prima* dos escolásticos, que, ademais, por esta razão mesma, é propriamente «ininteligível»; mas esta *materia prima* é certamente outra coisa que a «matéria» dos físicos[133]. Um exemplo do segundo caso é o que se chama o «princípio da igualdade da ação e da reação», que é em tão pouca medida um princípio, como se deduz imediatamente da lei geral do equilíbrio das forças naturais: cada vez que este equilíbrio se rompe de uma maneira qualquer, tende imediatamente a restabelecer-se, produzindo-se uma reação cuja intensidade é equivalente à da ação que o provocou; por conseguinte, isso nada mais é do que um simples caso particular do que a tradição extremo oriental chama as «ações e reações concordantes», que não concernem[134] só ao mundo corporal como as leis da mecânica, senão ao conjunto da manifestação sob todos seus modos e em todos seus estados; é precisamente sobre esta questão do equilíbrio e de sua representação matemática sobre o que nos propomos insistir aqui um pouco, já

---

[133] Cf. *El Reino de la Cantidad y los Signos de los Tiempos*, cap. II.

[134] Concernir: Dizer respeito, referir-se, ter relação. Aurélio Digital. N. do t.

que é bastante importante em si mesma como para merecer que nós nos detenhamos nela um instante.

Se representam habitualmente duas forças que se equilibram por dois «vectores» opostos, isto é, por dois segmentos de reta de igual longitude, mas dirigidos em sentidos contrários: se duas forças aplicadas em um mesmo ponto têm a mesma intensidade e a mesma direção, mas em sentidos contrários, estas forças se equilibram; como estão então sem ação sobre seu ponto de aplicação, diz-se comumente que se destroem, sem atender a que, se se suprime uma destas forças, a outra atua imediatamente, o que prova que não estava destruída em realidade. Caracterizam-se as forças por coeficientes numéricos proporcionais a suas intensidades respectivas, e duas forças de sentidos contrários estão afetadas de coeficientes de sinais diferentes, um positivo e o outro negativo: se um é

$$f,$$

o outro será

$$-f'.$$

No caso que acabamos de considerar, já que as duas forças têm a mesma intensidade, os coeficientes que as caracterizam devem ser iguais «em valor absoluto» e se tem

$$f = f',$$

de onde se deduz, como condição do equilíbrio,

$$f - f' = 0,$$

isto é, que a soma algébrica das duas forças, ou dos dois «vectores» que as representam, é nula, de tal sorte que o equilíbrio se define assim por zero. Já que, bem como o dissemos mais atrás, os matemáticos cometem o erro de considerar o zero como uma sorte de símbolo do nada, como se o nada pudesse ser simbolizado por algo, parece resultar disso que o equilíbrio é o estado de não existência, o que é uma conseqüência bastante singular; é por esta razão, sem dúvida, pelo que, em lugar de dizer que duas forças que se equilibram se neutralizam, o que seria exato, diz-se que se destroem, o que é contrário à realidade, assim como acabamos de fazê-lo ver por uma observação das mais simples.

A verdadeira noção do equilíbrio é muito diferente que essa: para compreendê-la basta destacar que todas as forças naturais, e não só as forças mecânicas, que, repitamo-lo ainda, não são nada mais que um caso muito particular delas, senão as forças de ordem sutil tanto como as de ordem corporal, são ou atrativas ou repulsivas; as primeiras podem ser consideradas como forças compressivas ou de contração, as segundas expansivas ou de dilatação[135]; e, no fundo, isso não é outra coisa que uma

[135] Se se considera a noção ordinária das forças centrípetas e centrífugas, um pode dar-se conta sem esforço de que as primeiras se reduzem às forças compressivas e as segundas às forças expansivas; do mesmo modo, uma força de tração é assimilável a uma força expansiva, já que se exerce a partir de seu ponto de aplicação, e uma força de impulsão ou de choque é assimilável a uma força compressiva, já que se exerce ao contrário para esse mesmo ponto de aplicação; mas, se se consideram em relação a seu ponto de emissão, é o inverso o que seria verdade, o que, ademais, é exigido pela lei da polaridade. — Em outro

expressão, neste domínio, da dualidade cósmica fundamental mesma. É fácil compreender que, em um meio primitivamente homogêneo, a toda compressão que se produza em um ponto corresponderá necessariamente uma expansão equivalente em outro ponto, e inversamente, de sorte que se deverão considerar sempre correlativamente dois centros de forças dos que cada um não pode existir sem o outro; isso é o que se pode chamar a lei da polaridade, que é, sob formas diversas, aplicável a todos os fenômenos naturais, porque deriva, ela também, da dualidade dos princípios mesmos que presidem[136] toda manifestação; esta lei, no domínio especial do que se ocupam os físicos, é sobretudo evidente nos fenômenos elétricos e magnéticos, mas não se limita de nenhuma maneira a estes. Se duas forças, uma compressiva e a outra expansiva, atuam sobre um mesmo ponto, a condição para que as mesmas se equilibrem ou se neutralizem, isto é, para que nesse ponto não se produza nem contração nem dilatação, é que as intensidades dessas duas forças sejam equivalentes; não dizemos iguais, já que estas forças são de espécies diferentes, e já que nisso se trata de uma diferença realmente qualitativa e não simplesmente quantitativa. Se podem caracterizar as forças por coeficientes proporcionais à contração ou à dilatação que produzem, de tal sorte que, se se consideram uma força compressiva e uma força expansiva, a primeira estará afetada de um coeficiente

$$n > 1;$$

e a segunda de um coeficiente

$$n' < 1;$$

cada um destes coeficientes pode ser a relação entre a densidade que toma o meio ambiente no ponto considerado, sob a ação da força correspondente, e a densidade primitiva deste mesmo meio, suposto homogêneo a este respeito quando não sofre a ação de nenhuma força, em virtude de uma simples aplicação do princípio de razão suficiente[137]. Quando não se produz nem compressão nem dilatação, esta relação é forçosamente igual à unidade, já que a densidade do meio não está modificada; por conseguinte, para que duas forças que atuam em um ponto se equilibrem, é mister que seu resultante tenha por coeficiente a unidade. É fácil ver que o coeficiente desta resultante é o produto, e não a soma como na concepção ordinária, dos coeficientes das duas forças consideradas; portanto, estes dois coeficiente

$$n$$

e

$$n'$$

deverão ser números inversos um do outro:

---

domínio, a «coagulação» e a «solução» herméticas correspondem também respectivamente à compressão e à expansão.

[136] Presidir: Dirigir, regular, reger, governar. Aurélio digital. Nota do tradutor.

[137] Entenda-se bem que, quando falamos assim do princípio de razão suficiente, consideramos-lhe unicamente em si mesmo, fora de todas as formas especializadas e mais ou menos contestáveis que Leibnitz ou outros quiseram dar-lhe.

$$n' = \frac{1}{n},$$

e se terá, como condição de equilíbrio,

$$n \times n' = 1;$$

assim, o equilíbrio estará definido, não pelo zero, mas pela unidade[138].

Se vê que esta definição do equilíbrio pela unidade, que é a única real, corresponde ao fato de que a unidade ocupa o meio na sucessão duplamente indefinida dos números inteiros e de seus inversos, enquanto este lugar central está em certo modo usurpado pelo zero na sucessão artificial dos números positivos e negativos. Muito longe de ser o estado de não existência, o equilíbrio é ao contrário a existência considerada em si mesma, independentemente de suas manifestações secundárias e múltiplas; ademais, entenda-se bem que não é o Não Ser, no sentido metafísico desta palavra, já que a existência, inclusive nesse estado primordial e indiferenciado, não é todavia mais do que o ponto de partida de todas as manifestações diferenciadas, como a unidade é o ponto de partida de toda a multiplicidade dos números. Esta unidade, tal como acabamos de considerá-la, e na qual reside o equilíbrio, é o que a tradição extremo oriental chama o «Invariável Meio»; e, segundo esta mesma tradição, este equilíbrio ou esta harmonia é, no centro de cada estado e de cada modalidade do ser, o reflexo da «Atividade do Céu».

---

[138] Esta fórmula corresponde exatamente à concepção do equilíbrio dos dois princípios complementares *yang* e *yin* na cosmologia extremo oriental.

CAPÍTULO XVIII

QUANTIDADES VARIÁVEIS E QUANTIDADES FIXAS

Voltemos agora à questão da justificativa do rigor do cálculo infinitesimal: vimos já que Leibnitz considera como iguais as quantidades cuja diferença, sem ser nula, é incomparável a essas quantidades mesmas[139]; em outros termos, as quantidades infinitesimais, que não sendo «*nihila absoluta*», são não obstante «*nihila respectiva*», e, como tais, devem ser desdenhadas a respeito das quantidades ordinárias. Desafortunadamente, a noção dos «incomparáveis» permanece demasiado imprecisa como se um raciocínio que se apóia apenas sobre esta noção possa bastar plenamente para estabelecer o caráter rigoroso do cálculo infinitesimal; sob este aspecto, este cálculo não se apresenta em suma mais do que como um método de aproximação indefinida, e nós não podemos dizer com Leibnitz que, «posto isso, não só se segue que o erro é indefinidamente pequeno, senão que é inteiramente nulo»[140]; mas, não teria outro meio mais rigoroso de chegar a esta conclusão? Em todo caso, devemos admitir que o erro introduzido no cálculo pode fazer-se tão pequeno como se queira, o que já é muito; mas, ¿não se suprime completamente este caráter infinitesimal do erro precisamente quando se considera, não já o curso mesmo do cálculo, senão os resultados aos que permite chegar finalmente?

Uma diferença infinitesimal, isto é, indefinidamente decrescente, não pode ser mais do que a diferença de duas quantidades variáveis, já que é evidente que a diferença de duas quantidades fixas não pode ser em si mesma mais do que uma quantidade fixa; por conseguinte, a consideração de uma diferença infinitesimal entre duas quantidades fixas não poderia ter nenhum sentido. Desde então, temos o direito de dizer que duas quantidades fixas «são rigorosamente iguais entre si desde o momento em que sua diferença pretendida pode supor-se tão pequena como se queira»[141]; agora bem, «o cálculo infinitesimal, como o cálculo ordinário, não tem em vista realmente mais do que quantidades fixas e determinadas»[142]; em suma, não introduz as quantidades variáveis

---

139 "ele (Leibnitz) se põe a pesquisar a matematização das probabilidades, terminando por descobrir o cálculo infinitesimal, incumbido de determinar a partir de que ponto uma diferença pequena se torna irrelevante, e construindo assim a única esperança de que uma física reduzida à probabilidade dialética possa conservar ainda o estatuto de ciência rigorosa". Introdução, de Olavo de Carvalho, a: Émile Boutroux, *Aristóteles*. N. do t.

140 Fragmento fechado de 26 de março de 1676.

141 Carnot, *Réflexions sur la Métapysique du Calcul infinitésimal*, p. 29.

142 Ch. de Freycinet, *De l'Analyse infinitésimale*, Prefácio, p. VIII.

mais do que a título de auxiliares, com um caráter puramente transitório, e estas variáveis devem desaparecer dos resultados, que não podem expressar mais do que relações entre quantidades fixas. Por conseguinte, para obter estes resultados é mister passar da consideração das quantidades variáveis à das quantidades fixas; e este passo tem por efeito precisamente eliminar as quantidades infinitesimais, que são essencialmente variáveis, e que não podem apresentar-se mais do que como diferenças entre quantidades variáveis.

Agora é fácil compreender por que Carnot, na definição que citamos precedentemente, insiste sobre a propriedade que têm as quantidades infinitesimais, tais como se empregam no cálculo, de poder fazer-se tão pequenas como se queira «sem que se esteja obrigado por isso a fazer variar as quantidades cuja relação se busca». É porque, em realidade, estas últimas devem ser quantidades fixas; é certo que, no cálculo, consideram-se como limites de quantidades variáveis, mas estas não jogam mais do que o papel de simples auxiliares, do mesmo modo que as quantidades infinitesimais que introduzem com elas. Para justificar o rigor do cálculo infinitesimal, o ponto essencial é que, nos resultados, não devem figurar mais do que quantidades fixas; por conseguinte, em definitivo, ao término do cálculo, é mister passar das quantidades variáveis às quantidades fixas, e isso é efetivamente um «passo ao limite», mas concebido de modo muito diferente como o fazia Leibnitz, já que não é uma conseqüência ou um «último termo» da variação mesma; agora bem, e isso é o mais importante, as quantidades infinitesimais, neste passo, eliminam-se por si mesmas, e isso simplesmente em razão da substituição das quantidades variáveis pelas quantidades fixas[143].

¿É mister, não obstante, não ver nesta eliminação, como o queria Carnot, mais do que o efeito de uma simples «compensação de erros»? Não o pensamos assim, e parece que, em realidade, pode-se ver nisso algo mais, desde que se faz a distinção das quantidades variáveis e das quantidades fixas como constituindo em certo modo dois domínios separados, entre os quais existe sem dúvida uma correlação e uma analogia, o que, ademais, é necessário para que se possa passar efetivamente de um ao outro, de qualquer maneira que se efetue este passo, mas sem que suas relações reais possam estabelecer nunca entre eles uma interpretação ou inclusive uma continuidade qualquer; ademais, entre estas duas espécies de quantidades, isso implica uma diferença de ordem essencialmente qualitativo, conformemente ao que dissemos mais atrás a respeito da noção do limite. É esta distinção a que Leibnitz não fez nunca claramente, e, aqui também, é sem dúvida sua concepção de uma continuidade universalmente aplicável a que o impediu fazer tal distinção; Leibnitz não podia ver que o «passo ao limite»

---

[143] Cf. Ch. de Freycinet, *ibid.*, p. 220: «As equações chamadas "imperfeitas" por Carnot são, falando propriamente, equações de espera ou de transição, que são rigorosas enquanto não se as faça servir mais do que ao cálculo dos limites, e que, ao contrário, seriam absolutamente inexatas, se os limites não devessem alcançar-se efetivamente. Basta ter apresentado ao espírito o destino efetivo dos cálculos, para não sentir nenhuma incerteza sobre o valor das relações pelas que se passa. É mister ver em cada uma delas, não o que parece expressar atualmente, senão o que expressará mais adiante, quando se chegue aos limites».

implica essencialmente uma descontinuidade, já que, para ele, não havia descontinuidade em nenhuma parte. No entanto, esta distinção é a única que nos permite formular a proposição seguinte: se a diferença de duas quantidades variáveis pode fazer-se tão pequena como se queira, as quantidades fixas que correspondem a estas variáveis, e que se consideram como seus limites respectivos, são rigorosamente iguais. Assim, uma diferença infinitesimal não pode tornar-se nunca nula, mas não pode existir mais do que entre variáveis, e, entre as quantidades fixas correspondentes, a diferença deve ser nula; daí, resulta imediatamente que um erro que pode fazer-se tão pequeno como se queira no domínio das quantidades variáveis, onde não pode tratar-se efetivamente, em razão do caráter mesmo destas quantidades, de nada mais que de uma aproximação indefinida, corresponde necessariamente a um erro rigorosamente nulo no domínio das quantidades fixas; é unicamente nisso, e não em outras considerações que, quaisquer que sejam, estão sempre mais ou menos fora ou ao lado da questão, onde reside essencialmente a verdadeira justificativa do rigor do cálculo infinitesimal.

CAPÍTULO XIX

AS DIFERENCIAÇÕES SUCESSIVAS

O que precede deixa subsistir ainda uma dificuldade no que diz respeito à consideração das diferentes ordens de quantidades infinitesimais: ¿como se podem conceber quantidades que sejam infinitesimais, não só em relação às quantidades ordinárias, senão em relação a outras quantidades que são elas mesmas infinitesimais? Aqui também, Leibnitz recorreu à noção dos «incomparáveis», mas esta noção é demasiado vaga para que possamos contentar-nos com ela, e não explica suficientemente a possibilidade das diferenciações sucessivas. Sem dúvida esta possibilidade pode compreender-se melhor por uma comparação ou um exemplo sacado da mecânica: «Quanto às

$$d\,d\,x,$$

estão para as

$$d\,x$$

como os *esforços* da gravidade ou as solicitações[144] centrífugas estão para a velocidade»[145]. E Leibnitz desenvolve esta idéia em sua resposta às objeções do matemático holandês Nieuwentijt, que, ainda que admitia as diferenciais de primeira ordem, sustentava que as de ordens superiores não podiam ser mais do que nulas: «A quantidade ordinária, a quantidade infinitesimal primeira ou diferencial, e a quantidade diferença-diferencial ou infinitesimal segunda, são entre si como o movimento, a velocidade e a solicitação[137], que é um elemento da velocidade[146]. O movimento descreve uma linha, a velocidade um elemento de linha, e a aceleração um elemento de elemento»[147]. Mas isso nada mais é do que um exemplo ou um caso particular, que não pode servir em suma mais do que de simples «ilustração» e não de argumento, e é necessário proporcionar uma justificativa de ordem geral, que este exemplo, em um certo sentido, contém ademais implicitamente.

Efetivamente, as diferenciais de primeira ordem representam os incrementos, ou melhor as variações, já que podem ser também, segundo os casos, no sentido

[144] No original aparece solicitação que traduzido ficaria aceleração. N. do t.
[145] Carta a Huygens, 1-11 de outubro de 1693.
[146] Esta «solicitação» é o que se designa habitualmente pelo nome de «aceleração».
[147] «*Responsio ad nonnullas difficultates a Dn. Bernardo Nieuwentijt circa Methodum differentialem seu infinitesimalem motas*», nas *Acta Eruditorum* de Leipzig, 1695.

decrescente tanto como no sentido crescente, que recebem a cada instante as quantidades ordinárias: tal é a velocidade em relação ao espaço percorrido em um movimento qualquer. Da mesma maneira, as diferenciais de uma certa ordem representam as variações instantâneas das de ordem precedente, tomadas a sua vez como magnitudes que existem em um certo intervalo: tal é a aceleração em relação à velocidade. Por conseguinte, é sobre a consideração de diferentes graus de variação, mais corretamente do que de magnitudes incomparáveis entre si, onde repousa verdadeiramente a distinção das diferentes ordens de quantidades infinitesimais.

Para precisar a maneira em que deve entender-se isto, faremos simplesmente o esclarecimento seguinte: entre as variáveis mesmas, podem-se estabelecer distinções análogas à que estabelecemos precedentemente entre as quantidades fixas e as variáveis; nestas condições, para retomar a definição de Carnot, se dirá que uma quantidade é infinitesimal em relação a outras quando se a possa fazer tão pequena como se queira «sem que se esteja obrigado por isso a fazer variar essas outras quantidades». É que, efetivamente, uma quantidade que não é absolutamente fixa, ou inclusive que é essencialmente variável, o que é o caso das quantidades infinitesimais, de qualquer ordem que sejam, pode ser considerada não obstante como relativamente fixa e determinada, isto é, como susceptível de jogar o papel de quantidade fixa em relação a algumas outras variáveis. É só nestas condições como uma quantidade variável pode ser considerada como o limite de outra variável, o que, segundo a definição mesma do limite, supõe que é considerada como fixa, ao menos sob uma certa relação, isto é, relativamente àquela da qual é o limite; inversamente, uma quantidade poderá ser variável, não só em si mesma ou, o que equivale ao mesmo, em relação às quantidades absolutamente fixas, senão também em relação a outras variáveis, enquanto estas últimas podem ser consideradas como relativamente fixas.

Em lugar de falar a este respeito de graus de variação como acabamos de fazê-lo, se poderia falar também de graus de indeterminação, o que, no fundo, seria exatamente a mesma coisa, considerada somente desde um ponto de vista um pouco diferente: uma quantidade, ainda que indeterminada por sua natureza, pode não obstante estar determinada, em um sentido relativo, pela introdução de algumas hipóteses, que deixam subsistir ao mesmo tempo a indeterminação de outras quantidades; por conseguinte, se pode dizer-se, estas últimas serão mais indeterminadas do que as outras, ou indeterminadas a um grau superior, e assim poderão ter com elas uma relação comparável à que têm as quantidades indeterminadas com as quantidades verdadeiramente determinadas. Nos limitaremos a estas poucas indicações sobre este tema, já que, por sumárias que sejam, pensamos que são ao menos suficientes para fazer compreender a possibilidade da existência das diferenciais de diversas ordens sucessivas; mas, em conexão com esta mesma questão, ainda nos falta mostrar mais explicitamente que não há realmente nenhuma dificuldade lógica em considerar graus múltiplos de indefinidade, tanto na ordem das quantidades decrescentes, que é aquela a que pertencem os infinitesimais ou os diferenciais, como no das quantidades crescentes, onde se podem considerar igualmente integrais de diferentes ordens, simétricas em certo

modo das diferenciais sucessivas, o que, ademais, é conforme à correlação que existe, assim como o explicamos, entre o indefinidamente crescente e o indefinidamente decrescente. Bem entendido, é de graus de indefinidade do que se trata nisso, e não de «graus de infinitude» tais como os entendia Jean Bernoulli, cuja concepção a este respeito Leibnitz não se atrevia nem a admiti-la nem a rechaçá-la; e este caso é também daqueles que se encontram resolvidos imediatamente pela substituição da noção do pretendido infinito pela noção do indefinido.

CAPÍTULO XX

DIFERENTES ORDENS DE INDEFINIDADE

As dificuldades lógicas e inclusive as contradições com as que chocam os matemáticos, quando consideram quantidades «infinitamente grandes» ou «infinitamente pequenas» diferentes entre si e pertencentes inclusive a ordens diferentes, vêm unicamente de que consideram como infinito o que é simplesmente indefinido; é certo que, em geral, parecem preocupar-se bastante pouco com estas dificuldades, que por isso não existem menos e não são menos graves, e que mostram sua ciência infestada de um montão de ilogismos, ou, se se prefere, de «paralogismos», que a fazem perder todo valor e todo alcance sério aos olhos daqueles que não se deixam iludir pelas palavras. Tenho aqui alguns exemplos das contradições que introduzem assim os que admitem a existência de magnitudes infinitas, quando se trata de aplicar esta noção às magnitudes geométricas: se se considera uma linha, uma reta por exemplo, como infinita, este infinito deve ser menor, e inclusive infinitamente menor, que o que é constituído por uma superfície, tal como um plano, no que esta linha está contida com uma infinitude de outras, e este segundo infinito, a sua vez, será infinitamente menor que o da extensão de três dimensões. A possibilidade mesma da coexistência de todos estes pretendidos infinitos, dos quais alguns são de mesmo grau e os outros de graus diferentes, deveria bastar para provar que nenhum deles pode ser verdadeiramente infinito, inclusive a falta de toda consideração de uma ordem mais propriamente metafísica; efetivamente, repitamo-lo ainda, já que nisso se trata de verdades sobre as quais nunca se poderia insistir demasiado, é evidente que, se se prefere uma pluralidade de infinitos distintos, cada um deles se encontra limitado pelos outros, o que equivale a dizer que se excluem uns aos outros. A dizer verdade, os «infinitistas», em quem esta acumulação puramente verbal de uma «infinitude de infinitos» parece produzir como uma sorte de «intoxicação mental», se é permissível expressar-se assim, não retrocedem em modo algum ante semelhantes contradições, já que, como já o dissemos, não sentem nenhuma dificuldade em admitir que há diferentes números infinitos, e que, por conseqüência, um infinito pode ser maior ou menor que outro infinito; mas a absurdidade de tais enunciados é muito evidente, e o fato de que são de um uso bastante corrente nas matemáticas atuais não muda em nada o tema, senão que mostra somente até que ponto se perdeu o sentido da lógica mais elementar em nossa época. Outra contradição ainda, não menos manifesta do que as precedentes, é a que se apresenta no caso de uma superfície fechada, e portanto, evidente e visivelmente finita, e que deveria conter não obstante uma infinitude de linhas, como, por exemplo, uma esfera que contém uma infinitude de círculos; se teria aqui um

continente finito, cujo conteúdo seria infinito, o que tem lugar igualmente, ademais, quando se sustenta, como o faz Leibnitz, a «infinitude efetiva» dos elementos de um conjunto contínuo.

Pelo contrário, não há nenhuma contradição em admitir a coexistência de indefinidades múltiplas e de diferentes ordens: é assim como a linha, indefinida segundo uma só dimensão, pode ser considerada a este respeito como constituindo uma indefinidade simples ou de primeira ordem; a superfície, indefinida segundo duas dimensões, e que compreende uma indefinidade de linhas indefinidas, será então uma indefinidade de segunda ordem, e a extensão de três dimensões, que pode compreender uma indefinidade de superfícies indefinidas, será do mesmo modo uma indefinidade de terceira ordem. Aqui é essencial destacar também que dizemos que a superfície compreende[148] uma indefinidade de linhas, mas não que esteja constituída por uma indefinidade de linhas, do mesmo modo que a linha não está composta de pontos, senão que compreende uma multidão indefinida deles; e ocorre o mesmo também com o volume em relação às superfícies, já que a extensão das três dimensões mesma não é outra coisa que um volume indefinido. Ademais, no fundo, isso é o que dissemos mais atrás a respeito dos «indivisíveis» e da composição do «contínuo»; as questões deste gênero, em razão de sua complexidade mesma, são daquelas que fazem sentir melhor a necessidade de uma linguagem rigorosa. Agregamos também a este propósito que, se desde um certo ponto de vista, pode-se considerar legitimamente a linha como engendrada por um ponto, a superfície por uma linha e o volume por uma superfície, isso supõe essencialmente que esse ponto, essa linha ou essa superfície se deslocam por um movimento contínuo, que compreende uma indefinidade de posições sucessivas; e isso é muito diferente que considerar essas posições tomadas isoladamente umas das outras, isto é, os pontos, as linhas e as superfícies consideradas como fixos e determinados, como constituindo respectivamente partes ou elementos da linha, da superfície e do volume. Do mesmo modo, quando se considera, em sentido inverso, uma superfície como a interseção de dois volumes, uma linha como a interseção de duas superfícies e um ponto como a interseção de duas linhas, entenda-se que estas interseções não devem conceber-se de nenhuma maneira como partes comuns a esses volumes, a essas superfícies ou a essas linhas; são só, como o dizia Leibnitz, limites ou extremidades.

Segundo o que dissemos faz um momento, cada dimensão introduz em certo modo um novo grau de indeterminação na extensão, isto é, no contínuo espacial considerado como susceptível de crescer indefinidamente em extensão, e se obtém assim o que se poderiam chamar potências sucessivas do indefinido[149]; e se pode dizer também que uma indefinidade de uma certa ordem ou de uma certa potência contém uma multidão de indefinidos de uma ordem inferior ou de uma potência menor.

[148] Compreender: **Conter em si**; constar de; abranger. Incorporar, englobar; incluir. Aurélio Digital. N. do t.

[149] Cf. *El Simbolismo de la Cruz*, cap. XII.

Enquanto em tudo isto não se trate mais do que de indefinido, todas estas considerações e as do mesmo gênero permanecem pois perfeitamente aceitáveis, já que não há nenhuma incompatibilidade lógica entre indefinidades múltiplas e distintas, que, ainda que são indefinidas, por isso não são menos de natureza essencialmente finita, e portanto perfeitamente susceptíveis de coexistir, como outras tantas possibilidades particulares e determinadas, no interior da Possibilidade total, que é a única que é infinita porque é idêntica ao Todo universal[150]. Estas mesmas considerações não tomam uma forma impossível e absurda mais do que pela confusão do indefinido com o infinito; assim, aqui temos também um desses casos onde, como ocorria quando se tratava da «multidão infinita», a contradição inerente a um pretendido infinito determinado oculta, deformando-a até fazê-la quase irreconhecível, outra idéia que em si mesma não tem nada de contraditório.

Acabamos de falar de diferentes graus de indeterminação das quantidades no sentido crescente; é por esta mesma noção, considerada no sentido decrescente, pela que justificamos mais atrás a consideração das diversas ordens de quantidades infinitesimais, cuja possibilidade se compreende assim, mais facilmente ainda, ao observar a correlação que assinalamos entre o indefinidamente crescente e o indefinidamente decrescente. Entre as quantidades indefinidas de diferentes ordens, as de uma ordem diferente da primeira são sempre indefinidas tanto em relação às das ordens precedentes como em relação às quantidades ordinárias; é completamente legítimo também considerar do mesmo modo, em sentido inverso, quantidades infinitesimais de diferentes ordens, onde as de cada ordem são infinitesimais, não só em relação às quantidades ordinárias, senão também em relação às quantidades infinitesimais das ordens precedentes[151]. Não há heterogeneidade absoluta entre as quantidades indefinidas e as quantidades ordinárias, e não a há tampouco entre estas e as quantidades infinitesimais; nisso não há em suma mais do que diferenças de grau, não diferenças de natureza, já que, em realidade, a consideração do indefinido, de qualquer ordem que seja ou a qualquer potência que seja, não nos faz sair nunca do finito; é também a falsa concepção do infinito a que introduz em aparência, entre estas diferentes ordens de quantidades, uma heterogeneidade radical que, no fundo, é completamente compreensível. Ao suprimir esta heterogeneidade, estabelece-se aqui uma sorte de continuidade, mas muito diferente da que considerava Leibnitz entre as

[150] Cf. *Los Estados múltiples del ser*, cap. I.

[151] Reservamos, como se faz ademais muito habitualmente, a denominação de «infinitesimais» às quantidades indefinidamente decrescentes, com a exclusão das quantidades indefinidamente crescentes, que, para abreviar, podemos chamar simplesmente «indefinidas»; é bastante singular que Carnot tenha reunido umas e outras sob o mesmo nome de «infinitesimais», o que é contrário, não só ao uso, senão ao sentido mesmo que este termo saca de sua formação. Ainda que conservamos a palavra «infinitesimal» depois de ter definido sua significação como o fizemos, não podemos dispensar-nos de fazer destacar que este termo tem o grave defeito de derivar visivelmente da palavra «infinito», o que lhe faz muito pouco adequado à idéia que expressa realmente; para poder empregar-lhe assim sem inconveniente, é mister em certo modo esquecer sua origem, ou ao menos não lhe atribuir mais do que um caráter unicamente «histórico», como provindo de fato da concepção que Leibnitz se fazia de suas «ficções bem fundadas».

variáveis e seus limites, e muito melhor fundada na realidade, já que a distinção das quantidades variáveis e das quantidades fixas implica, ao contrário, essencialmente uma verdadeira diferença de natureza.

Nestas condições, as quantidades ordinárias mesmas, ao menos quando se trata de variáveis, podem ser consideradas em certo modo como infinitesimais em relação a quantidades indefinidamente crescentes, já que, se uma quantidade pode fazer-se tão grande como se queira em relação à outra, esta devém[152] inversamente, por isso mesmo, tão pequena como se queira em relação à primeira. Introduzimos esta restrição de que deve tratar-se aqui de variáveis, porque uma quantidade infinitesimal deve sempre ser concebida como essencialmente variável, e porque isso é algo verdadeiramente inerente a sua natureza mesma; ademais, quantidades que pertencem a duas ordens diferentes de indefinidade são forçosamente variáveis uma em relação à outra, e esta propriedade de variabilidade relativa e recíproca é perfeitamente simétrica, já que, segundo o que acabamos de dizer, isso equivale a considerar uma quantidade como crescendo indefinidamente em relação a outra, ou a esta como decrescendo indefinidamente em relação à primeira; sem esta variabilidade relativa, não haveria nem crescimento nem decrescimento indefinido, senão mais corretamente relações definidas e determinadas entre as duas quantidades.

É da mesma maneira como, quando há uma mudança de situação entre dois corpos *A* e *B*, ao menos enquanto não se considere nisso nada mais que essa mudança em si mesmo, isso equivale a dizer que o corpo *A* está em movimento em relação ao corpo *B*, ou, inversamente, que o corpo *B* está em movimento em relação ao corpo *A*; a noção do movimento relativo não é menos simétrica, a este respeito, que a da variabilidade relativa que consideramos aqui. É por isso pelo que, segundo Leibnitz, que mostrava com isso a insuficiência do mecanicismo cartesiano como teoria física que pretende proporcionar uma explicação dos fenômenos naturais, não se pode estabelecer nenhuma distinção entre um estado de movimento e um estado de repouso se um se limita unicamente à consideração das mudanças de situação; para isso é mister fazer intervir um pouco de outra ordem, a saber, a noção da força, que é a causa próxima dessas mudanças, e a única que ao ser atribuída a um corpo mais bem do que a outro, permite encontrar nesse corpo e só nele a verdadeira razão da mudança[153].

---

[152] Terceira pessoa do singular do verbo devir: Vir a ser; tornar-se; devenir. Aurélio Digital. N.t.

[153] Ver Leibnitz, *Discours de Métaphysique*, cap. XVIII; cf. *El Reino de la Cantidad y los Signos de los Tiempos*, cap. XIV.

CAPÍTULO XXI

O INDEFINIDO É INESGOTÁVEL ANALITICAMENTE

Nos dois casos que acabamos de considerar, o do indefinidamente crescente e o do indefinidamente decrescente, uma quantidade de uma certa ordem pode ser considerada como a soma de uma indefinidade de elementos, dos que cada um é uma quantidade infinitesimal em relação a esta soma. Ademais, para que se possa falar de quantidades infinitesimais, é necessário que se trate de elementos não determinados em relação a sua soma, e isso é assim desde que esta soma é indefinida em relação aos elementos de que se trata; isso resulta imediatamente do caráter essencial do indefinido mesmo, enquanto este implica forçosamente, como o dissemos, a idéia de um «devir», e portanto de uma certa indeterminação. Ademais, entenda-se bem que esta indeterminação pode não ser mais do que relativa e não existir mais do que sob um certo ponto de vista ou em relação a uma certa coisa: tal é por exemplo o caso de uma soma que, sendo uma quantidade ordinária, não é indefinida em si mesma, senão só em relação a seus elementos infinitesimais; mas em todo caso, se fora de outro modo e se não se fizesse intervir esta noção de indeterminação, seríamos conduzidos simplesmente à concepção dos «incomparáveis», interpretada no sentido grosseiro do grão de areia com respeito à terra, e da terra com respeito ao firmamento.

A soma da qual falamos aqui não pode ser efetuada, em modo algum, à maneira de uma soma aritmética, porque para isso seria mister que uma série indefinida de adições sucessivas pudesse ser acabada, o que é contraditório; no caso onde a soma é uma quantidade ordinária e determinada como tal, é mister evidentemente, como já o dissemos ao formular a definição do cálculo integral, que o número ou mais corretamente a multidão dos elementos cresça indefinidamente ao mesmo tempo que a magnitude de cada um deles decresce indefinidamente, e, neste sentido, a indefinidade destes elementos é verdadeiramente inesgotável. Mas, se esta soma não pode ser efetuada desta maneira, como resultado final de uma multidão de operações diferentes e sucessivas, pode sê-lo, pelo contrário, de um só golpe e por uma operação única, que é a integração[154]; essa é a operação inversa da diferenciação, já que reconstitui a soma a

[154] Os termos «integral» e «integração», cujo uso prevaleceu, não são de Leibnitz, senão de Jean Bernoulli; Leibnitz não se servia neste sentido mais do que das palavras «soma» e «somatória», que têm o inconveniente de parecer indicar uma assimilação entre a operação de que se trata e a formação de uma

partir de seus elementos infinitesimais, enquanto a diferenciação vai ao contrário da soma aos elementos, proporcionando o meio de formular a lei das variações instantâneas de uma quantidade cuja expressão está dada.

Assim, desde que se trata de indefinido, a noção de soma aritmética já não é aplicável, e é mister recorrer à de integração para suprir a esta impossibilidade de «numerar» os elementos infinitesimais, impossibilidade que, bem entendido, resulta de sua natureza mesma e não de uma imperfeição qualquer por nossa parte. Podemos destacar de passagem que, no que diz respeito à aplicação às magnitudes geométricas, que é ademais, no fundo, a verdadeira razão de ser de todo o cálculo infinitesimal, há um método de medida que é completamente diferente do método habitual fundado sobre a divisão de uma magnitude em porções definidas, método do que já falamos precedentemente a propósito das «unidades de medida». Em suma, este último equivale sempre a substituir de alguma maneira o contínuo pelo descontínuo, por esse «picado» em porções iguais da magnitude da mesma espécie tomada como unidade[155], a fim de poder aplicar diretamente o número à medida das magnitudes contínuas, o que não pode fazer-se efetivamente mais do que alterando assim sua natureza para fazê-la assimilável, por assim dizer, à do número. Ao contrário, o outro método respeita, tanto como é possível, o caráter próprio do contínuo, considerando-lhe como uma soma de elementos, não já fixos e determinados, senão essencialmente variáveis e capazes de decrescer, em sua variação, por embaixo de toda magnitude asignable[156], e que permitem por isso mesmo fazer variar a quantidade espacial entre limites tão próximos como se queira, o que é, tendo em conta a natureza do número que apesar de tudo não pode ser mudada, a representação menos imperfeita que se possa dar de uma variação contínua.

Estas observações permitem compreender de uma maneira mais precisa em que sentido pode dizer-se, como o fizemos ao começo, que os limites do indefinido não podem ser alcançados nunca por um procedimento analítico, ou, em outros termos, que o indefinido é, não inesgotável absolutamente e de qualquer maneira que seja, mas sim ao menos inesgotável analiticamente. Naturalmente, devemos considerar como analítico, a este respeito, o procedimento que consistiria, para reconstruir um todo, em tomar seus elementos diferente e sucessivamente: tal é o procedimento de formação de uma soma aritmética, e é nisso, precisamente, no que a integração difere essencialmente dela. Isto é particularmente interessante desde nosso ponto de vista, já que nisso se vê, por um exemplo muito claro, o que são as verdadeiras relações da análise e da síntese: contrariamente à opinião corrente, segundo a qual a análise seria em certo modo preparatório à síntese e conduziria a esta, de sorte que seria sempre mister começar pela

---

soma aritmética; ademais, dizemos só parecer, já que é muito certo que a diferença essencial destas duas operações não pôde escapar realmente a Leibnitz.

[155] Ou por uma fração desta magnitude, mas pouco importa, já que esta fração constitui então uma unidade secundária menor, que substitui a primeira no caso onde a divisão por esta não se faz exatamente, para obter um resultado exato ou ao menos mais aproximado.

[156] Asignable: achacable: aplicable, atribuible, endosable, imputable: aplicável, **atribuível**, endosável, imputável. *http://www.wordreference.com/sinonimos*. N. do t.

análise, inclusive quando um não entende ficar-se aí, a verdade é que não se pode chegar nunca efetivamente à síntese partindo da análise; toda síntese, no verdadeiro sentido desta palavra, é por assim dizer algo imediato, que não é precedido de nenhuma análise e que é inteiramente independente dela, como a integração é uma operação que se efetua de um só golpe e que não pressupõe, em modo algum, a consideração de elementos comparáveis aos de uma soma aritmética; e, como esta soma aritmética não pode dar o meio de alcançar e de esgotar o indefinido, há, em todos os domínios, coisas que resistem por sua natureza mesma a toda análise e cujo conhecimento não é possível mais do que pela síntese unicamente[157].

[157] Aqui e no que vai seguir, deve entender-se bem que tomamos os termos «análises» e «sínteses» em sua acepção verdadeira e original, que é mister ter bom cuidado de distinguir daquela, completamente diferente e bastante imprópria, na que se fala normalmente da «análise matemática», e segundo a qual a integração mesma, apesar de seu caráter essencialmente sintético, é considerada como formando parte do que se chama a «análise infinitesimal»; ademais, é por esta razão pelo que preferimos evitar o emprego desta última expressão, e servir-nos só das de «cálculo infinitesimal» e de «método infinitesimal», que ao menos não poderiam prestar-se a nenhum equívoco deste gênero.

CAPÍTULO XXII

CARÁTER SINTÉTICO DA INTEGRAÇÃO

Ao contrário da formação de uma soma aritmética, que tem, como acabamos de dizê-lo, um caráter propriamente analítico, a integração deve ser considerada como uma operação essencialmente sintética, já que envolve simultaneamente todos os elementos da soma que se trata de calcular, conservando entre eles a «indistinção» que convém às partes do contínuo, desde que estas partes, em consequência da natureza mesma do contínuo, não podem ser algo fixo e determinado. Ademais, a mesma «indistinção» deve manter-se igualmente, ainda que por uma razão algo diferente, a respeito dos elementos descontínuos que formam uma série indefinida quando se quer calcular sua soma, já que, se a magnitude de cada um destes elementos se concebe então como determinada, seu número não o está, e inclusive podemos dizer mais exatamente que sua multidão ultrapassa todo número; e não obstante há casos onde a soma dos elementos de uma tal série tende para um certo limite definido quando sua multidão cresce indefinidamente. Ainda que esta maneira de falar pareça quiçá um pouco estranha à primeira vista, se poderia dizer que uma tal série descontínua é indefinida por «extrapolação», enquanto um conjunto contínuo o é por «interpolação»; o que acabamos de dizer com isto, é que, se se toma numa série descontínua uma porção compreendida entre dois termos quaisquer, nisso não há nada de indefinido, já que esta porção está determinada ao mesmo tempo em seu conjunto e em seus elementos, enquanto é ao estender-se além desta porção sem chegar nunca a um último termo como esta série é indefinida; ao contrário, em um conjunto contínuo, determinado como tal, é no interior mesmo deste conjunto onde o indefinido se encontra compreendido, porque os elementos não estão determinados e porque, ao ser o contínuo sempre divisível, não há últimos elementos; assim, sob esta relação, estes dois casos são em certo modo inversos um do outro. A adição de uma série numérica indefinida não se acabaria nunca se todos os termos devessem ser tomados um a um, já que não há nenhum último termo no que possa terminar; por conseguinte, nos casos onde uma tal somatória é possível, não pode sê-lo mais do que por um procedimento sintético, que, em certo modo, faz-nos apreender de um só golpe toda uma indefinidade considerada em seu conjunto, sem que isso pressuponha de modo algum a consideração diferente de seus elementos, que, ademais, é impossível por isso mesmo de que são em multidão indefinida. Do mesmo modo também, quando uma série indefinida nos é dada implicitamente por sua lei de formação, como vimos um exemplo disso no caso da sucessão dos números inteiros, podemos dizer que se nos dá assim toda inteira sinteticamente, e que não pode sê-lo de

outro modo; efetivamente, dar uma tal série analiticamente, seria dar distintamente todos seus termos, o que é uma impossibilidade.

Portanto, quando tenhamos que considerar uma indefinidade qualquer, seja a de um conjunto contínuo ou a de uma série descontínua, será mister, em todos os casos, recorrer a uma operação sintética para poder alcançar seus limites; uma progressão por graus seria aqui sem efeito e não poderia fazer-nos chegar a eles nunca, já que uma tal progressão não pode desembocar em um termo final mais do que sob a dupla condição de que este termo e o número dos graus a percorrer para alcançar-lhe sejam um e outro determinados. É por isso que não dissemos que os limites do indefinido não podiam ser alcançados de nenhuma maneira, impossibilidade que seria injustificável desde que esses limites existem, senão somente que não podem ser alcançados analiticamente: uma indefinidade não pode ser esgotada por graus, mas pode ser compreendida em seu conjunto por uma dessas operações transcendentes das quais, a integração, nos proporciona o exemplo na ordem matemática. Se pode destacar que a progressão por graus corresponderia aqui à variação mesma da quantidade, diretamente no caso das séries descontínuas, e, no que diz respeito ao caso de uma variação contínua, seguindo-a, por assim dizer, na medida em que o permite a natureza descontínua do número; pelo contrário, por uma operação sintética, um se coloca imediatamente fora e além da variação, assim como deve ser necessariamente, segundo o que dissemos mais atrás, para que o «passo ao limite» possa ser realizado efetivamente; em outros termos, a análise não alcança mais do que as variáveis, tomadas no curso mesmo de sua variação, e unicamente a síntese alcança seus limites, o que é aqui o único resultado definitivo e realmente válido, já que é mister forçosamente, para que se possa falar de um resultado, desembocar em algo que se refira exclusivamente a quantidades fixas e determinadas.

Ademais, entenda-se bem que se poderia encontrar o análogo destas operações sintéticas em outros domínios distintos que o da quantidade, já que está claro que a idéia de um desenvolvimento indefinido de possibilidades é aplicável também a qualquer outra coisa além da quantidade, por exemplo a um estado qualquer de existência manifestada e às condições, quaisquer que sejam, às que esse estado está submetido, já se considere nisso o conjunto cósmico em geral ou um ser particular, isto é, seja que se se coloque no ponto de vista «macrocósmico» ou no ponto de vista «microcósmico»[158]. Se poderia dizer que o «passo ao limite» corresponde à fixação definitiva dos resultados da manifestação na ordem principial; efetivamente, é só por isso como o ser escapa finalmente à mudança ou ao «devir», que é necessariamente inerente a toda manifestação como tal; e se vê assim que esta fixação não é de nenhuma maneira um «último termo» do desenvolvimento da manifestação, senão que se situa essencialmente fora e além deste desenvolvimento, porque pertence a outra ordem de realidade, transcendente em relação à manifestação e ao «devir»; por conseguinte, a distinção da ordem manifestada e da ordem principial corresponde analogicamente, a este respeito, à que estabelecemos entre o domínio das quantidades variáveis e o das quantidades fixas.

---

[158] Sobre esta aplicação analógica da noção da integração, cf. *O Simbolismo da Cruz*, cap. XVIII e XX.

Ademais, desde que se trata de quantidades fixas, é evidente que não poderia ser introduzida nenhuma modificação nelas por nenhuma operação qualquer que seja, e que, portanto, o «passo ao limite» não tem como efeito produzir alguma coisa neste domínio, senão somente dar-nos seu conhecimento; do mesmo modo, já que a ordem principial é imutável, não se trata, para chegar a ele, de «efetuar» algo que não existiria ainda, senão mais corretamente de tomar efetivamente consciência do que é, de uma maneira permanente e absoluta. Dado o tema deste estudo, devemos, naturalmente, considerar aqui mais particularmente, e antes de mais nada o que se refere propriamente ao domínio quantitativo, no que a idéia do desenvolvimento das possibilidades se traduz, como o vimos, por uma noção de variação, já seja no sentido do indefinidamente crescente, já seja no do indefinidamente decrescente; mas estas poucas indicações mostrarão que todas estas coisas são susceptíveis de receber, por uma transposição analógica apropriada, um alcance incomparavelmente maior que o que parecem ter em si mesmas, já que, em virtude de uma tal transposição, a integração e as demais operações do mesmo gênero aparecem verdadeiramente como um símbolo da «realização» metafísica mesma.

Com isto se vê toda a amplitude da diferença que existe entre a ciência tradicional, que permite tais considerações, e a ciência profana dos modernos; e, a este propósito, agregamos também outra precisão, que se refere diretamente à distinção do conhecimento analítico e do conhecimento sintético: efetivamente, a ciência profana é essencial e exclusivamente analítica: não considera nunca os princípios, e se perde no detalhe dos fenômenos, cuja multiplicidade indefinida e indefinidamente mutante é verdadeiramente inesgotável para ela, de sorte que não pode chegar nunca, enquanto conhecimento, a nenhum resultado real e definitivo; fica unicamente nos fenômenos mesmos, isto é, nas aparências exteriores, e é incapaz de alcançar o fundo das coisas, assim como Leibnitz reprovava já o mecanicismo cartesiano. Ademais, essa é uma das razões pelas que se explica o «agnosticismo» moderno, já que, posto que há coisas que não podem conhecer-se mais do que sinteticamente, quem quer que não proceda mais do que pela análise é levada, por isso mesmo, a declará-las «incognocíveis», porque o são efetivamente dessa maneira, do mesmo modo que aquele que fica numa visão analítica do indefinido pode crer que esse indefinido é absolutamente inesgotável, enquanto, em realidade, não o é mais do que analiticamente. É certo que o conhecimento sintético é essencialmente o que se pode chamar um conhecimento «global», como o é o de um conjunto contínuo ou o de uma série indefinida cujos elementos não se dão e não podem dar-se distintamente; mas, além de que isso é tudo o que importa verdadeiramente no fundo, sempre se pode, já que tudo está contido aí em princípio, redescender[159] desde aí à consideração de tais coisas particulares como se queira, do mesmo modo que, se por exemplo uma série indefinida está dada sinteticamente pelo conhecimento de sua lei de formação, sempre se pode, quando há lugar a isso, calcular em particular qualquer de seus termos, enquanto, partindo ao

[159] Redescender: Tornar a descer. Aurélio digital. Nota do tradutor.

contrário dessas mesmas coisas particulares consideradas em si mesmas e em seu detalhe indefinido, um não pode elevar-se nunca aos princípios; e é nisso no que, assim como o dizíamos no começo, o ponto de vista e a marcha da ciência tradicional são em certo modo inversos dos da ciência profana, como a síntese mesma é inversa da análise. Ademais, isso é uma aplicação da verdade evidente de que, se se pode sacar o «menos» do «mais», pelo contrário, não se pode fazer sair nunca o «mais» do «menos»; no entanto, isto é o que pretende fazer a ciência moderna, com suas concepções mecanicistas e materialistas e seu ponto de vista exclusivamente quantitativo; mas, é precisamente porque isso é uma impossibilidade, pelo que, em realidade, é incapaz de dar a verdadeira explicação de nada[160].

[160] Sobre este último ponto, se poderão conferir também as considerações que expusemos no *Reino da Quantidade e os Sinais dos Tempos*.

CAPÍTULO XXIII

OS ARGUMENTOS DE ZENON DE ELEA

As considerações que precedem contêm implicitamente a solução de todas as dificuldades do gênero das que Zenon de Elea, por seus argumentos célebres, opunha à possibilidade do movimento, ao menos em aparência e a julgar só pela forma sob a que esses argumentos são apresentados habitualmente, já que se pode duvidar que tal tenha sido no fundo sua verdadeira significação. Efetivamente, é pouco verossímil que Zenon tenha tido realmente a intenção de negar o movimento; o que parece mais provável, é que só tenha querido provar a incompatibilidade deste com a suposição, admitida concretamente pelo atomistas, de uma multiplicidade real e irredutível existente na natureza das coisas. Por conseguinte, é contra essa multiplicidade mesma, assim concebida, contra a que esses argumentos, na origem, deviam estar dirigidos em realidade; não dizemos contra toda multiplicidade, já que é evidente que a multiplicidade existe também em sua ordem, do mesmo modo que o movimento, que ademais, como toda mudança de qualquer gênero que seja, supõe-na necessariamente; mas, do mesmo modo que o movimento, em razão de seu caráter de modificação transitória e momentânea, não poderia bastar-se a si mesmo e não seria mais do que uma pura ilusão se não se vinculasse a um princípio superior, transcendente em relação a ele, tal como o «motor imóvel» de Aristóteles, assim também a multiplicidade seria verdadeiramente inexistente se estivesse reduzida a si mesma e se não procedesse da unidade, assim como temos uma imagem matemática disso, segundo o vimos, na formação da série dos números. Ademais, a suposição de uma multiplicidade irredutível exclui forçosamente todo laço real entre os elementos das coisas, e portanto toda continuidade, já que a continuidade nada mais é do que um caso particular ou uma forma especial de um tal laço; precisamente, como o temos já dito precedentemente, o atomismo implica necessariamente a descontinuidade de todas as coisas; é com esta descontinuidade com a que, em definitiva, o movimento é realmente incompatível, e vamos ver que é isso o que mostram efetivamente os argumentos de Zenon.

Se faz, por exemplo, um raciocínio como este: um corpo móvel não poderá passar nunca de uma posição a outra, porque, entre essas duas posições, por próximas que estejam, terá sempre, diz-se, uma infinitude de outras posições que deverão ser percorridas sucessivamente no curso do movimento, e, qualquer que seja o tempo empregado para percorrê-las, esta infinitude não poderá ser esgotada nunca. Certamente, aqui não poderia tratar-se de uma infinitude como se diz, o que realmente não tem nenhum sentido; mas por isso não é menos certo que há lugar a considerar, em

todo intervalo, uma indefinidade verdadeira de posições do corpo móvel, indefinidade que, efetivamente, não pode ser esgotada dessa maneira analítica que consiste em ocupá-las distintamente uma a uma, como se tomariam um a um os termos de uma série descontínua. Unicamente, é esta concepção mesma do movimento a que é errônea, já que equivale em suma a considerar o contínuo como composto de pontos, ou de últimos elementos indivisíveis, o mesmo que na concepção dos corpos como compostos de átomos; e isso equivale a dizer que em realidade não há contínuo, já que, já se trate de pontos ou de átomos, estes últimos elementos não podem ser mais do que descontínuos; ademais, é certo que, sem continuidade, não teria movimento possível, e isso é tudo o que este argumento prova efetivamente. Ocorre o mesmo com o argumento da flecha que voa e que não obstante está imóvel, porque, a cada instante, não se a vê mais do que numa só posição, o que equivale a supor que cada posição, em si mesma, pode ser considerada como fixa e determinada, e porque assim as posições sucessivas formam uma sorte de série descontínua. Ademais, é mister destacar que não é verdade, de fato, que um corpo móvel nunca seja visto como ocupando uma posição fixa, e que inclusive, antes ao contrário, quando o movimento é bastante rápido, chega-se a não ver já distintamente o corpo móvel mesmo, senão só uma sorte de rastro de seu deslocamento contínuo: assim, por exemplo, se se faz girar rapidamente um carvão aceso, já não se vê a forma desse carvão, senão só um círculo de fogo; ademais, já se explique este fato pela persistência das impressões retinianas, ou seja, da retina, como o fazem os fisiologistas, ou de qualquer outra maneira que se queira, isso importa pouco, já que por isso não é menos manifesto do que, em semelhantes casos, apreende-se em certo modo diretamente e de uma maneira sensível, a continuidade mesma do movimento. Ademais, quando, ao formular um tal argumento, diz-se «a cada instante», com isso se supõe que o tempo está formado de uma série de instantes indivisíveis, a cada um dos quais corresponderia uma posição determinada do corpo móvel; mas, em realidade, o contínuo temporal não está mais composto de instantes do que o contínuo espacial de pontos, e, como já o indicamos, é mister a reunião ou mais corretamente a combinação destas duas continuidades do tempo e do espaço para dar conta da possibilidade do movimento.

Se dirá também que, para percorrer uma certa distância, é mister percorrer primeiro a metade desta distância, depois a metade da outra metade, depois a metade do que fica e assim sucessiva e indefinidamente[161], de sorte que um se encontrará sempre em presença de uma indefinidade que, considerada assim, será efetivamente inesgotável. Outro argumento quase equivalente é este: se se supõem dois corpos móveis separados por uma certa distância, um deles, ainda que vá mais rápido do que o outro, não poderá alcançar-lhe nunca, já que, quando chega no ponto onde este se encontrava, o outro estará numa segunda posição, separada da primeira por uma distância menor do que a distância inicial; quando chega a esta segunda posição, o outro

[161] Isto corresponde aos termos sucessivos da série indefinida $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$, dada em exemplo por Leibnitz numa passagem que citamos mais atrás.

estará numa terceira, separada da segunda por uma distância ainda menor, e assim sucessiva e indefinidamente, de sorte que a distância entre estes dois corpos móveis, ainda que decresça sempre, não viria a ser nunca nula. O defeito essencial destes argumentos, assim como o do precedente, consiste em que supõem que, para alcançar um certo termo, todos os graus intermediários devem ser percorridos distinta e sucessivamente. Agora bem, das duas uma: ou o movimento considerado é verdadeiramente contínuo, e então não pode ser decomposto desta maneira, já que o contínuo não tem últimos elementos; ou se compõe de uma sucessão descontínua, ou que ao menos pode ser considerada como tal, de intervalos dos que cada um tem uma magnitude determinada, como os passos de um homem em marcha[162], e então a consideração destes intervalos suprime evidentemente a de todas as posições intermediárias possíveis, que não têm que ser percorridas efetivamente como outras tantas etapas diferentes. Ademais, no primeiro caso, que é propriamente o de uma variação contínua, o termo desta variação, suposto fixo por definição, não pode ser alcançado na variação mesma, e o fato de atingir-lhe efetivamente exige a introdução de uma heterogeneidade qualitativa, que constitui, por sua vez, uma verdadeira descontinuidade, e que se traduz aqui pelo passo do estado de movimento ao estado de repouso; isto nos conduz à questão do «passo ao limite», cuja verdadeira noção devemos ainda acabar de precisar.

[162] Em realidade, os movimentos dos que se compõe a marcha são contínuos como todo movimento, mas os pontos onde o homem toca o solo formam uma sucessão descontínua, de sorte que cada passo marca um intervalo determinado, e é assim como a distância percorrida pode ser descomposta em tais intervalos, já que o solo não é tocado em nenhum ponto intermediário.

CAPÍTULO XXIV

VERDADEIRA CONCEPÇÃO DO PASSO AO LIMITE

A consideração do «passo ao limite», dissemos mais atrás, é necessária, se não às aplicações práticas do método infinitesimal; se ao menos a sua justificativa teórica, e esta justificativa é precisamente a única coisa que nos importa aqui, já que as simples regras práticas de cálculo, que atinam de uma maneira em certo modo «empírica» e sem que se saiba muito bem por que razão, não têm evidentemente nenhum interesse desde nosso ponto de vista. Sem dúvida, para efetuar os cálculos e inclusive para levá-los até seu término, não há nenhuma necessidade de propor a questão de saber se a variável alcança seu limite e como pode alcançar-lhe; mas, no entanto, se não lhe alcança, estes cálculos não teriam nunca mais valor do que o de simples cálculos de aproximação. É certo que aqui se trata de uma aproximação indefinida, já que a natureza mesma das quantidades infinitesimais permite fazer o erro tão pequeno como se queira, sem que por isso seja possível, não obstante, suprimir-lhe inteiramente, já que estas mesmas quantidades infinitesimais, em seu decrescimento indefinido, não tornam-se nunca nulas. Se dirá talvez que, praticamente, isso é o equivalente de um cálculo perfeitamente rigoroso; mas, além de que não é disso do que se trata para nós, essa aproximação indefinida mesma ¿pode guardar um sentido se, nos resultados que se deve desembocar, não têm de considerar-se já variáveis, senão mais correta e unicamente quantidades fixas e determinadas? Nestas condições, desde o ponto de vista dos resultados, não se pode sair desta alternativa: ou não se alcança o limite, e então o cálculo infinitesimal não é mais que o menos grosseiro dos métodos de aproximação; ou sim se alcança o limite, e então se trata de um método que é verdadeiramente rigoroso. Mas temos visto que o limite, em razão de sua definição mesma, não pode ser alcançado nunca exatamente pela variável; ¿como pois teremos o direito de dizer que não obstante pode ser alcançado? Pode sê-lo precisamente, não no curso do cálculo, senão nos resultados, porque, nestes, não devem figurar mais do que quantidades fixas e determinadas, como o limite mesmo, e já não variáveis; por conseguinte, é a distinção das quantidades variáveis e das quantidades fixas, distinção ademais propriamente qualitativa, a que é, como já o dissemos, a única verdadeira justificativa do rigor do cálculo infinitesimal.

Assim, repetimos ainda, o limite não pode ser alcançado na variação e como término[163] desta; não é o último dos valores que deve tomar a variável, e a concepção de uma variação contínua que desemboca em um «último valor» ou em um «último estado» seria tão incompreensível e contraditória como a de uma série indefinida que

[163] Término é usado como "o último termo". N. do t.

desemboca em um «último termo», ou como a da divisão de um conjunto contínuo que desemboca em «últimos elementos». Por conseguinte, o limite não pertence à série dos valores sucessivos da variável; está fora desta série, e é por isso pelo que dissemos que o «passo ao limite» implica essencialmente uma descontinuidade**.** Se fora de outro modo, estaríamos em presença de uma indefinidade que poderia ser esgotada analiticamente, e isso é o que não pode ter lugar; mas é aqui onde a distinção que estabelecemos a este respeito cobra toda sua importância, já que nos encontramos em um dos casos onde se trata de alcançar, segundo a expressão que já empregamos, os limites de uma certa indefinidade; por conseguinte, não é sem razão que a mesma palavra «limite» se encontra, com outra acepção mais especial, no caso particular que consideramos agora. O limite de uma variável deve limitar verdadeiramente, no sentido geral desta palavra, a indefinidade dos estados ou das modificações possíveis que implica a definição desta variável; e é justamente por isso pelo que é mister necessariamente que se encontre fora do que deve limitar assim. Não poderia tratar-se de nenhuma maneira de esgotar esta indefinidade pelo curso mesmo da variação que a constitui; do que se trata em realidade, é de passar além do domínio desta variação, domínio no que o limite não se encontra compreendido, e é este resultado o que se obtém, não analiticamente e por graus, senão sinteticamente e de um só golpe, de uma maneira em certo modo «súbita» pela que se traduz a descontinuidade que se produz então, pelo passo das quantidades variáveis às quantidades fixas[164].

O limite pertence essencialmente ao domínio das quantidades fixas: é por isso pelo que o «passo ao limite» exige logicamente a consideração simultânea, na quantidade, de duas modalidades diferentes, em certo modo sobrepostas; não é outra coisa então que o passo à modalidade superior na qual se realiza plenamente o que, na modalidade inferior, não existe mais do que no estado de simples tendência, e isso, para empregar a terminologia aristotélica, é um verdadeiro passo da potência ao ato, o que certamente não tem nada em comum com a simples «compensação de erros» que considerava Carnot. Por sua definição mesma, a noção matemática do limite implica um caráter de estabilidade e de equilíbrio, caráter que é o de algo permanente e definitivo, e que, evidentemente, não pode ser realizado pelas quantidades enquanto se as considere, na modalidade inferior, como essencialmente variáveis; por conseguinte, não pode ser alcançado nunca gradualmente, senão que o é imediatamente pelo passo de uma modalidade à outra, que é o único que permite suprimir todas as etapas intermediárias, porque compreende e envolve sinteticamente toda sua indefinidade, e o que não era e não poderia ser mais do que uma tendência nas variáveis se afirma e se fixa em um resultado real e definido. De outro modo, o «passo ao limite» seria sempre um ilogismo puro e simples, já que é evidente que, enquanto se permaneça no domínio das variáveis, não pode obter-se esta firmeza que é própria do limite, onde as quantidades que eram

[164] A propósito deste caráter «súbito» ou «instantâneo», se poderá recordar aqui, a título de comparação com a ordem dos fenômenos naturais, o exemplo da ruptura de uma corda que demos mais atrás: esta ruptura é também o limite da tensão, mas não é assimilável de nenhuma maneira a uma tensão a qualquer grau que seja.

consideradas precedentemente como variáveis perderam precisamente esse caráter transitório e contingente. O estado das quantidades variáveis é, efetivamente, um estado eminentemente transitório e em certo modo imperfeito, já que nada mais é do que a expressão de um «devir», cuja idéia a encontramos igualmente no fundo da noção da indefinidade mesma, que, ademais, está estreitamente unida a esse estado de variação. Assim o cálculo não pode ser perfeito, no sentido de verdadeiramente acabado, mais do que quando chegou a resultados nos quais já não entra nada variável nem indefinido, senão só quantidades fixas e definidas; e já que vimos como isso mesmo é susceptível de aplicar-se, por transposição analógica, além da ordem quantitativa, que já não tem então mais do que um valor de símbolo, e até no que concerne diretamente à «realização» metafísica do ser.

CAPÍTULO XXV

CONCLUSÃO

Não há necessidade de insistir sobre a importância que as considerações que expusemos no curso deste estudo apresentam desde o ponto de vista propriamente matemático, já que contribuem para a solução de todas as dificuldades que se suscitaram a propósito do método infinitesimal, seja no que diz respeito a sua verdadeira significação, ou seja no que diz respeito a seu rigor. A condição necessária e suficiente para que possa dar-se esta solução não é outra que a estrita aplicação dos verdadeiros princípios; mas são justamente os princípios os que os matemáticos modernos, o mesmo que os demais sábios profanos, ignoram inteiramente, e esta ignorância é, no fundo, a única razão de tantas discussões que, nestas condições, podem prosseguir-se indefinidamente sem desembocar nunca em nenhuma conclusão válida, e que não fazem, pelo contrário, mais do que embaralhar mais as questões e multiplicar as confusões, como a querela dos «finitistas» e dos «infinitistas» o mostra com bastante clareza; não obstante, teria sido muito fácil cortar o assunto pela raiz se se tivesse sabido propor claramente, antes de mais nada, a verdadeira noção do Infinito metafísico e a distinção fundamental do Infinito e do indefinido. Leibnitz mesmo, conquanto teve ao menos o mérito de abordar francamente algumas questões, o que não fizeram sequer os que vieram depois dele, freqüentemente não disse sobre este tema mais do que coisas muito pouco metafísicas, e às vezes inclusive quase tão claramente antimetafísicas como as especulações ordinárias da generalidade dos filósofos modernos; por conseguinte, é já a mesma falta de princípios o que lhe impediu responder a seus contraditores de uma maneira satisfatória e em certo modo definitiva, e a que, por isso mesmo, abriu a porta a todas as discussões ulteriores. Sem dúvida, pode dizer-se com Carnot que, «se Leibnitz se equivocou, seria unicamente ao acolher dúvidas sobre a exatidão de sua própria análise, se é que teve realmente estas dúvidas»[165]; mas, inclusive se não as tinha no fundo, tampouco podia em todo caso demonstrar rigorosamente esta exatidão, porque sua concepção da continuidade, que não é certamente metafísica e nem sequer lógica, impedia-lhe fazer as distinções necessárias a este respeito e, portanto, formular a noção precisa do limite, que é, como o mostramos, de uma importância capital para o fundamento do método infinitesimal.

Por conseguinte, vê-se por tudo isso de que interesse pode ser a consideração dos princípios, inclusive para uma ciência especial considerada em si mesma, e sem que um se proponha ir, apoiando-se nesta ciência, além do domínio relativo e contingente ao que ela se aplica de uma maneira imediata; é isso, bem entendido, o que desconhecem

[165] *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, p. 33.

totalmente os modernos, que, por sua concepção profana da ciência, se jactam gostosamente de ter feito esta independente da metafísica, e inclusive da teologia[166], quando a verdade é que com isso não fizeram mais que a privar de todo valor real enquanto conhecimento. Ademais, se se compreendesse a necessidade de vincular a ciência aos princípios, é evidente que desde então não haveria nenhuma razão para ficar aí, e que se seria conduzido naturalmente à concepção tradicional segundo a qual uma ciência particular, qualquer que seja, vale menos pelo que é em si mesma do que pela possibilidade de servir-se dela como um «suporte» para elevar-se a um conhecimento de ordem superior[167]. Quisemos dar aqui precisamente, por um exemplo característico, uma idéia do que seria possível fazer, em alguns casos ao menos, para restituir a uma ciência, mutilada e deformada pelas concepções profanas, seu valor e seu alcance reais, ao mesmo tempo desde o ponto de vista do conhecimento relativo que representa diretamente e desde o do conhecimento superior ao que é susceptível de conduzir por transposição analógica; pôde-se ver concretamente o que é possível sacar, sob este último aspecto, de noções como as da integração e do «passo ao limite». Ademais, é mister dizer que as matemáticas, mais do que qualquer outra ciência, proporcionam assim um simbolismo muito particularmente apto para a expressão das verdades metafísicas, na medida na que estas são expressáveis, assim como podem dar-se conta disso aqueles que tenham lido algumas de nossas precedentes obras; é por isso pelo que este simbolismo matemático é de um uso tão freqüente, seja desde o ponto de vista tradicional em geral, seja desde o ponto de vista iniciático em particular[168]. Unicamente, para que isso possa ser assim, entenda-se bem que é mister antes de mais nada que estas ciências sejam limpadas dos erros e das confusões múltiplas que foram introduzidos nelas pelas opiniões falsas dos modernos, e seríamos felizes se o presente trabalho pudesse contribuir, de alguma maneira ao menos, a esse resultado.

---

[166] Recordamos ter visto em alguma parte a um «cientificista» contemporâneo indignar-se de que, por exemplo, na idade média, tenha-se podido encontrar um meio de falar da Trindade a propósito da geometria do triângulo; ademais, provavelmente não suspeitava que isso é ainda assim atualmente no simbolismo do Compañerazgo.

[167] Ver por exemplo a este respeito, sobre o aspecto esotérico e iniciático das «artes liberais» na idade média, *O Esoterismo de Dante*, pp. 10-15, edit. francesa.

[168] Sobre as razões deste valor especial que, a este respeito, tem o simbolismo matemático, tanto numérico como geométrico, se poderão ver concretamente as explicações que demos no *Reino da Quantidade e os Sinais dos Tempos*.